



**Dina Fernanda
da Costa Seabra**

**Existência de minimizantes relaxados e Fenómeno
de Lavrentiev**



**Dina Fernanda
da Costa Seabra**

**Existência de minimizantes relaxados e Fenómeno
de Lavrentiev**

Dissertação apresentada à Universidade de Aveiro para cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de Doutor em Matemática, realizada sob a orientação científica do Prof. Doutor António M. Caetano, Professor Associado com Agregação do Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro e do Prof. Doutor Andrey Sarychev, Professor Catedrático do Departamento de Matemática Aplicada à Decisão da Universidade de Florença, Itália.

Ao Vítor, ao Pedro e ao João

o júri

presidente

Reitora da Universidade de Aveiro

vogais

Doutor Andrey Sarychev

Full Professor, Department of Mathematics for Decisions, University of Florence, Italy.
(co-orientador)

Doutor António Manuel Rosa Pereira Caetano

Professor Associado com Agregação da Universidade de Aveiro. (orientador)

Doutor Jaime Maria Monteiro Carvalho e Silva

Professor Associado da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra.

Doutor Delfim Fernando Marado Torres

Professor Associado da Universidade de Aveiro.

Doutor Manuel Cidrões Castro Guerra

Professor Auxiliar do Instituto Superior de Economia e Gestão da Universidade Técnica de Lisboa.

agradecimentos

Em primeiro lugar, agradeço aos meus orientadores, Prof. António Caetano e Prof. Andrey Sarychev, pela sua orientação científica, pelo interesse que manifestaram na minha investigação, pela disponibilidade que sempre demonstraram e pelas suas valiosas sugestões e leitura crítica que fizeram do meu trabalho.

Do ponto de vista institucional, agradeço à Universidade de Aveiro, e em particular à Escola Superior de Tecnologia e Gestão de Águeda, pelas facilidades concedidas para a preparação desta dissertação. Gostaria ainda de agradecer à Unidade de Investigação *Matemática e Aplicações* (UIMA) da Universidade de Aveiro, e ao *Grupo de Análise Funcional e Aplicações*, pelo suporte financeiro concedido, que me permitiu deslocar a Florença para trabalhar com o Prof. Andrey Sarychev.

Desejo igualmente agradecer à minha família, e em particular ao Vítor, ao Pedro e ao João pelo o apoio e colaboração, que em muito me ajudaram durante o trabalho.

Agradeço também aos colegas da ESTGA que, directa ou indirectamente, me apoiaram durante a elaboração deste trabalho.

palavras-chave

cálculo das variações, coercividade, compactificação de Loeb, controlo ótimo, convexidade, espaços de Sobolev, Fenómeno de Lavrentiev, fractal, minimizantes, regularidade lipschitziana, traço

resumo

Neste trabalho prova-se a existência de minimizantes relaxados em problemas de controlo ótimo não convexos usando técnicas de compactificação. Faz-se a extensão do exemplo de Manià a dimensão dois, obtendo-se uma classe de problemas variacionais em 2D que apresentam Fenómeno de Lavrentiev. Prova-se que o fenómeno persiste a certas perturbações, obtendo-se assim uma classe de funcionais cujos Lagrangianos são coercivos e convexos em relação ao gradiente. Adicionalmente, apresentam-se exemplos de problemas do cálculo das variações com diferentes condições de fronteira, e em diferentes tipos de domínios (incluindo domínios com fronteira fractal), que exibem Fenómeno de Lavrentiev.

keywords

calculus of variations, coercivity, compactification of Loeb, convexity, fractal, Lavrentiev Phenomenon, Lipschitzian regularity, minimizers, optimal control, Sobolev spaces, trace.

abstract

The existence of relaxed minimizers of nonconvex optimal control problems is proved in this work using compactification techniques. The example of Manià is extended to two dimensions, thus obtaining 2D examples which exhibit the Lavrentiev Phenomenon. The persistence of the phenomenon for certain perturbations on the integrands is proved, thus arriving to a class of functionals whose Lagrangians are coercive and convex with respect to gradient, and which exhibit the Lavrentiev Phenomenon. Examples for the problems of the calculus of variations with different types of boundary conditions and different types of domains (including domains of fractal boundary), which exhibit the Lavrentiev Phenomenon, are also constructed.

Conteúdo

Introdução	1
1 Alguns resultados e definições em espaços de Sobolev	7
1.1 Definições e conceitos de base	7
1.2 Geometria do domínio	10
1.2.1 Operador extensão	10
1.2.2 Operador traço	13
1.2.3 Exemplos de domínios onde existe Tr	16
1.3 Lema de integração parcial	20
2 Existência de minimizante relaxado	25
2.1 Introdução	25
2.2 Problema relaxado	28
2.3 Problema relaxado de tempo ótimo	33
2.3.1 Mudança de variável	33
2.3.2 Redução do problema relaxado a um problema relaxado de tempo ótimo	34
2.4 Problema compactificado	36
2.4.1 Compactificação de Loeb	38
2.4.2 Convexidade de $E_z^e(CU)$	42
2.5 Existência de minimizante relaxado	44

3	Fenómeno de Lavrentiev	51
3.1	Introdução	51
3.2	Generalidades sobre o Fenómeno de Lavrentiev	51
3.3	Construção de algumas sucessões minimizantes	54
3.3.1	Exemplo em 1D	55
3.3.2	Exemplo em 2D	57
3.4	Exemplo de um funcional em 1D que exhibe fenómeno de Lavrentiev	62
3.5	Extensão do exemplo de Manià a 2D	64
3.5.1	Lavrentiev <i>gap</i>	66
3.5.2	Persistência do fenómeno de Lavrentiev	75
3.5.3	Fronteira livre	79
3.6	Exemplo em 2D com duas variáveis independentes	87
4	Fenómeno de Lavrentiev em domínios não rectangulares	95
4.1	Introdução	95
4.2	Problema com condições de fronteira	96
4.2.1	Mensurabilidade do conjunto no caso em que $ D_1 \geq \frac{1}{2}$	98
4.2.2	Mensurabilidade do conjunto no caso em que $ D_1 < \frac{1}{2}$	102
4.2.3	Lavrentiev <i>gap</i>	104
4.3	Fronteira livre	109
4.4	Domínio aberto e existência de funcional que exhibe <i>gap</i>	114
	Problema em aberto	117
	Bibliografia	119
	Índice Remissivo	125

Introdução

O presente trabalho aborda as questões de existência de minimizantes de um problema variacional formulado para várias classes de funções, de regularidade dos minimizantes e da dependência do valor do mínimo ou ínfimo da classe de funções considerada.

O resultado clássico de existência, o célebre Teorema de Tonelli, estabelece a existência de minimizantes na classe das funções absolutamente contínuas sob as hipóteses de coercividade (crescimento superlinear) e convexidade. Se falhar esta última hipótese, considera-se a extensão (relaxamento) do problema para a classe de controlos relaxados, usando um método clássico proposto nos anos 60.

A questão de existência de minimizantes na classe de controlos relaxados foi estudada detalhadamente, no caso em que o conjunto de parâmetros de controlo é limitado. No caso de controlos não limitados a única referência que se conseguiu encontrar é o tratado clássico de Cesari [18], onde o respectivo resultado é apresentado na forma duma nota, e cuja demonstração só pode ser recuperada a partir da análise e das sucessivas modificações de resultados semelhantes.

Nesta dissertação propõe-se uma abordagem completamente diferente desta questão. A ideia central desta abordagem baseia-se na ideia introduzida por Gamkrelidze e que consiste, num primeiro passo, numa transformação do problema de Lagrange

$$\int_0^T l(t, x, u) dt \rightarrow \min, \quad x' = f(t, x, u),$$

num problema de controlo de tempo óptimo para um sistema autónomo de controlo e, num segundo passo, no uso de uma compactificação do conjunto dos parâmetros do controlo. Com esta compactificação é possível a aplicação do Teorema de Filippov (1959), o qual estabelece a existência de minimizantes para problemas autónomos de tempo óptimo com controlos limitados. As condições de coercividade garantem que as funções l e f do problema original podem ser estendidas para a compactificação (para o ponto que corresponde ao “infinito”). Esta ideia, que envolve a compactificação de Alexandroff, foi usada por Gamkrelidze para mostrar a existência de minimizantes de problemas variacionais clássicos com Lagrangianos convexos.

Sarychev e Torres (2000) usaram este tipo de técnica e o mesmo tipo de compactificação para provar a regularidade lipchitziana dos minimizantes de um problema de Lagrange com dinâmica afim de controlo, e Torres (2003) usou-a num problema de Lagrange com dinâmica não linear.

Neste trabalho segue-se uma abordagem semelhante para controlos relaxados. Usando a convexificação do Lagrangiano e do segundo membro do sistema dinâmico, passa-se de um problema de Lagrange cujo Lagrangiano é positivo e não convexo para um problema relaxado. A transformação de Gamkrelidze transforma este último problema num problema autónomo de tempo óptimo.

No entanto, as condições *standard* de coercividade impostas às funções l e f do problema original não se verificam no problema relaxado. Não podendo prosseguir com a compactificação mínima de Alexandroff, recorre-se à compactificação mais rica do conjunto dos controlos, introduzida por Loeb. Esta ideia foi usada por Guerra e Sarychev (2008) para provar resultados de regularidade lipschitziana de minimizantes relaxados de problemas de controlo óptimo.

Nesta dissertação apresenta-se uma demonstração de existência de minimizantes relaxados em controlo óptimo sob condições mais fracas do que as apresentadas por Guerra e Sarychev (2008). Para este efeito, descrevem-se as propriedades topológicas da compactificação

obtida para o conjunto de controlos CU .

Uma outra classe importante de questões é a dependência do mínimo dos funcionais do domínio da sua definição. O célebre fenómeno de Lavrentiev verifica-se quando o ínfimo do funcional num espaço de Sobolev $W^{1,p}$ depende do expoente p , ou seja, da regularidade imposta às funções admissíveis. Este fenómeno assume, nas áreas do cálculo das variações e do controlo óptimo, uma grande relevância teórica e consequências importantes para os métodos numéricos. Assim, é da maior importância obter resultados de regularidade lipschitziana que permitam excluir este tipo de ocorrência.

O primeiro exemplo de funcional que exhibe fenómeno de Lavrentiev foi apresentado por Lavrentiev (1926) como resposta a uma pergunta colocada por Tonelli. Após este, outros exemplos em dimensão um foram construídos. O que aparece mais vezes referenciado é o exemplo apresentado por Manià (1934). Contudo, este exemplo não satisfaz as condições de existência de Tonelli. Ball e Mizel (1984) apresentaram, em 1D, um funcional regular que exhibe fenómeno de Lavrentiev, e que satisfaz as condições do Teorema de Tonelli. Sarychev (1997) apresentou uma classe de problemas autónomos regulares de 2^a ordem em 1D que exibem fenómeno de Lavrentiev.

Existem muitos outros exemplos de funcionais que exibem o fenómeno de Lavrentiev, bem como resultados de regularidade dos minimizantes, os quais excluem a ocorrência do fenómeno. O primeiro resultado de regularidade lipschitziana foi apresentado por Tonelli. Clarke e Vinter (1985) provaram a regularidade lipschitziana para Lagrangianos autónomos em 1D. Mais recentemente, a este respeito, foram apresentados resultados por Torres (2003), Ornelas (2004) e Dal Maso e Frankowska (2003), entre outros, que estendem os resultados apresentados por Clarke e Vinter.

No caso multidimensional, em comparação com o que se passa em dimensão um, não existem tantos exemplos de funcionais que apresentam o fenómeno de Lavrentiev bem como resultados de regularidade. Em termos de exemplos, salienta-se o apresentado por Foss (2003) onde são construídos funcionais, em 2D, cujo ínfimo depende continuamente

do expoente do espaço de Sobolev ao qual pertencem as funções consideradas. De acordo com o conhecimento da autora do presente trabalho, não foi proposta uma extensão dos exemplos clássicos do fenómeno de Lavrentiev ao caso multidimensional.

Nesta dissertação apresenta-se uma classe de funcionais que são uma extensão do exemplo de Manià a 2D. Começa-se por tratar o caso em que o domínio é rectangular, e estende-se o estudo a domínios cuja fronteira é irregular, podendo mesmo ser fractal. A maior dificuldade na construção desta extensão consistiu na prova da mensurabilidade de conjuntos em 2D que, no caso unidimensional, são intervalos.

Prova-se, também, a estabilidade do fenómeno de Lavrentiev face a algumas perturbações aditivas, obtendo-se uma classe de funcionais regulares nos tipos de domínios mencionados anteriormente. À custa desta classe de funcionais construíram-se problemas variacionais em 2D, sem condições de fronteira, que exibem fenómeno de Lavrentiev.

A passagem do domínio rectangular para um domínio com fronteira irregular pode trazer alguns problemas na interpretação das condições de fronteira. Para poder dar uma interpretação à classe de funções $\mathcal{A}^p = \left\{ u \in W^{k,p}(\Omega) : u|_{\partial\Omega} = u_0 \right\}$ trabalha-se em domínios onde é possível definir os operadores extensão e traço. Apresentam-se alguns domínios cuja fronteira é fractal e que estão nestas condições e prova-se que, em domínios deste tipo, a classe de funcionais construída em 2D continua a exibir fenómeno de Lavrentiev.

Como já foi referido, resultados de regularidade em 2D são mais escassos, nomeadamente para o caso autónomo, que em 1D. Neste trabalho, partindo de uma classe de funcionais autónomos em 2D, constroem-se sucessões de minimizantes que permitem concluir a não existência do fenómeno de Lavrentiev nesses casos.

O presente trabalho está dividido em quatro capítulos. No Capítulo 1 mencionam-se algumas definições e resultados em espaços de Sobolev que serão necessários para o que se segue. Demonstra-se também o Lema de integração parcial, uma vez que, ao longo do trabalho é necessário calcular $\int_a^b v_t(s, t) dt$ quando v_t é a derivada parcial fraca.

No Capítulo 2 apresenta-se uma demonstração do resultado de existência de minimizantes relaxados de um problema de controlo óptimo não convexo.

No Capítulo 3 apresentam-se alguns exemplos de problemas variacionais que exibem o fenómeno de Lavrentiev. Recorrendo a técnicas de reparametrização, constroem-se sucessões de minimizantes para problemas autónomos não regulares em dimensão um e em dimensão dois, que não exibem fenómeno de Lavrentiev. Apresenta-se, também, a extensão do exemplo de Manià a dimensão dois em domínios rectangulares com diferentes condições de fronteira.

Por último, no Capítulo 4, generaliza-se a classe de funcionais apresentada no Capítulo 3 a domínios não rectangulares cuja fronteira pode ser irregular.

Capítulo 1

Alguns resultados e definições em espaços de Sobolev

1.1 Definições e conceitos de base

Ao longo deste trabalho Ω é um aberto de \mathbb{R}^n , os integrais são integrais de Lebesgue, a medida de conjuntos é a medida de Lebesgue, sempre que nada se indicar em contrário, e $L^p(\Omega)$ são os espaços usuais de Lebesgue, que consistem nos conjuntos das (classes de equivalência das) funções definidas em Ω que verificam

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty, \quad 1 \leq p < \infty$$

e

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \text{esssup}_{x \in \Omega} |f(x)| < \infty, \quad p = \infty,$$

onde dx é a medida de Lebesgue.

Definição 1.1.1. Dada uma função f definida em Ω , designa-se por suporte de f o conjunto definido por

$$\text{supp } f = \overline{\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}}.$$

Definição 1.1.2. Sejam $1 \leq p \leq +\infty$, $k \in \mathbb{N}$ e $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ um multi-índice com $|\alpha| = \sum_{j=1}^n \alpha_j$. Define-se o espaço de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ como sendo o conjunto de todas as funções que pertencem a $L^p(\Omega)$ e cujas derivadas fracas, ou no sentido das distribuições, de ordem α com $|\alpha| \leq k$ existem e pertencem a $L^p(\Omega)$. Em $W^{k,p}(\Omega)$ considera-se a norma

$$\|f\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha f\|_{L^p(\Omega)}.$$

Designa-se por $W_{loc}^{k,p}(\Omega)$ o conjunto de todas as funções f que pertencem a $W^{k,p}(V)$ para todo o aberto e limitado $V \subset \mathbb{R}^n$ tal que $\bar{V} \subset \Omega$.

Recorde-se que dada uma função f localmente integrável em Ω , diz-se que uma função g localmente integrável em Ω é a derivada fraca de ordem α de f em Ω se, para todo o $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, isto é, para todo o φ infinitamente diferenciável com suporte compacto em Ω , se tem

$$\int_{\Omega} f(x) D^\alpha \varphi(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} g(x) \varphi(x) dx,$$

onde $D^\alpha = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}}$. Escreve-se $g = D^\alpha f$.

Definição 1.1.3. O espaço de Schwartz, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, é o espaço de todas as funções φ infinitamente diferenciáveis que verificam

$$\|\varphi\|_{k,l} < \infty, \text{ para todo } k, l \in \mathbb{N}_0,$$

onde

$$\|\varphi\|_{k,l} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1 + |x|^2)^{\frac{k}{2}} \sum_{|\alpha| \leq l} |D^\alpha \varphi(x)|.$$

Definição 1.1.4. Uma função $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $m \in \mathbb{N}$, diz-se lipschitziana quando

$$\|f(x) - f(y)\| \leq L \|x - y\|$$

para alguma constante $L > 0$ e para todo $x, y \in \Omega$.

Se uma função f for lipschitziana em cada compacto $K \subset \Omega$, diz-se que f é localmente lipschitziana. Usando o Teorema de Rademacher ([25]; p.81) conclui-se que se uma função

é localmente lipschitziana então é diferenciável em quase toda a parte. Uma função é localmente lipschitziana em Ω se e só se $f \in W_{loc}^{1,\infty}(\Omega)$ ([25]; p.131).

Definição 1.1.5. Seja d um número real não negativo. Define-se medida de Hausdorff de dimensão d do conjunto Ω como sendo

$$\mathcal{H}^d(\Omega) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^d(\Omega),$$

onde

$$\mathcal{H}_\delta^d(\Omega) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^d : \{U_i\} \text{ é uma } \delta\text{-cobertura de } \Omega \right\},$$

com $|U_i|$ o diâmetro de U_i , isto é, $|U_i| = \sup \{|x - y| : x, y \in U_i\}$ e $0 < |U_i| \leq \delta$.

Em dimensão um, dado u a pertencer a $W^{1,1}(]a, b[)$, u é absolutamente contínua e, por conseguinte, u é uniformemente contínua em $]a, b[$. Assim, é possível estender u por continuidade à fronteira, designando-se por $u(a)$ e $u(b)$ os valores obtidos desta forma. Uma vez que para $p \geq 1$ e $a, b \in \mathbb{R}$ vem $W^{1,p}(]a, b[) \subset W^{1,1}(]a, b[)$, não há problemas com a interpretação das condições de fronteira no caso de dimensão um.

No caso geral, em dimensão superior a um, a abordagem que se faz em dimensão um de estender por continuidade à fronteira não é possível, uma vez que as funções de $W^{1,p}(\Omega)$ com $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ não são necessariamente contínuas. Assim, será necessário dar uma interpretação às condições de fronteira.

Dados $1 \leq p \leq \infty$, pretende-se dar uma interpretação às condições de fronteira para funções $u \in W^{1,p}(\Omega)$, as quais se designarão por $u|_{\partial\Omega} = u_0$. O processo mais simples consiste em restringir a atenção às funções do espaço de Sobolev que se podem estender por continuidade à fronteira, as quais se representam por $\overline{C}(\Omega)$, ou seja, a funções que pertencem a $W^{1,p}(\Omega) \cap \overline{C}(\Omega)$.

Contudo, recorrendo a operadores de extensão e traço é possível dar uma interpretação às condições de fronteira, alargando assim a classe das funções a considerar.

Definição 1.1.6. Dados $1 \leq p \leq \infty$ e $k \in \mathbb{N}$, designa-se por $EW^{k,p}$ a classe de domínios $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ para os quais existe um operador extensão linear contínuo $E : W^{k,p}(\Omega) \longrightarrow W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$. Em particular, E verifica $Eu|_{\Omega} = u$ e $\|Eu\|_{W^{k,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)}$ para todo o $u \in W^{k,p}(\Omega)$, onde $Eu|_{\Omega}$ designa a restrição pontual.

A existência do operador extensão e a possibilidade de definir condições de fronteira em $W^{1,p}(\Omega)$ depende da geometria de Ω . Assim, no que se segue, definem-se alguns tipos de domínios.

1.2 Geometria do domínio

1.2.1 Operador extensão

Definição 1.2.1. Diz-se que um domínio limitado Ω é de Lipschitz, ou que $\partial\Omega$ é de Lipschitz, se, para cada $x \in \partial\Omega$, existe $r > 0$, uma mudança de coordenadas adequada (se necessário) e uma função lipschitziana $f : \mathbb{R}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que para um paralelepípedo $Q(x, r) = \{y : |y_i - x_i| < r; i = 1, \dots, n\}$ se tem

$$\Omega \cap Q(x, r) = \left\{y : f(y_1, y_2, \dots, y_{n-1}) < y_n\right\} \cap Q(x, r).$$

Para domínios cuja fronteira é de Lipschitz, Calderón [14] provou que para cada $k \in \mathbb{N}$, existe um operador extensão,

$$E_k : W^{k,p}(\Omega) \longrightarrow W^{k,p}(\mathbb{R}^n),$$

para todo $1 < p < \infty$.

Mais tarde, Stein [45] estendeu este resultado e provou que existe um operador extensão

$$E : W^{k,p}(\Omega) \longrightarrow W^{k,p}(\mathbb{R}^n),$$

para todo o $k \in \mathbb{N}$ e para todo $1 \leq p \leq \infty$.

Em domínios que são de Lipschitz, para além da existência do operador extensão é possível garantir algumas características desse operador como se refere no teorema seguinte.

Teorema 1.2.2. ([25]; p.135) *Sejam Ω e V dois subconjuntos abertos de \mathbb{R}^n , $\overline{\Omega} \subset V$, $\partial\Omega$ é de Lipschitz e $1 \leq p < \infty$. Então existe um operador linear contínuo*

$$E : W^{1,p}(\Omega) \rightarrow W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$$

tal que

$$Eu|_{\Omega} = u$$

e

$$\text{supp}(Eu) \subset V,$$

para todo $u \in W^{1,p}(\Omega)$.

Jones [31] provou a existência do operador extensão para uma classe mais larga de domínios localmente uniformes.

Definição 1.2.3. Diz-se que um domínio Ω é um domínio (ϵ, δ) localmente uniforme se, dados quaisquer dois pontos $x, y \in \Omega$ tais que $|x - y| < \delta$, existe um arco rectificável $\gamma \subset \Omega$ de comprimento não superior a $\frac{|x - y|}{\epsilon}$ e tal que para todo o $z \in \gamma$

$$\text{dist}(z, \partial\Omega) \geq \frac{\epsilon|z - x||z - y|}{|x - y|}.$$

Como é referido por Jones [31], todo o domínio que é de Lipschitz é (ϵ, δ) localmente uniforme. Contudo, o inverso não se verifica [42]. Por exemplo, o domínio floco de neve de Koch é localmente uniforme e não é de Lipschitz [42].

Jones [31] provou que dado um domínio Ω , (ϵ, δ) localmente uniforme, para cada $k \in \mathbb{N}$ existe um operador extensão

$$E_k : W^{k,p}(\Omega) \longrightarrow W^{k,p}(\mathbb{R}^n),$$

para todo $1 \leq p \leq \infty$.

Mais tarde, Rogers [42] provou que o operador extensão é independente de k , isto é, que existe

$$E : W^{k,p}(\Omega) \longrightarrow W^{k,p}(\mathbb{R}^n),$$

para todo o $k \in \mathbb{N}$ e $1 \leq p \leq \infty$.

Se Ω é de Lipschitz, $W^{k,p}(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$ para $p > n$, com $C(\overline{\Omega})$ o conjunto das funções uniformemente contínuas em Ω . Assim, dado $u \in W^{k,p}(\Omega)$ existe sempre um representante contínuo que se estende continuamente (e univocamente) à fronteira e, neste caso,

$$\left\{ u \in W^{k,p}(\Omega) \cap \overline{C}(\Omega) : u|_{\partial\Omega} = u_0 \right\} = \left\{ u \in W^{k,p}(\Omega) : u|_{\partial\Omega} = u_0 \right\}.$$

Se Ω não é de Lipschitz, uma possibilidade é usar o operador extensão, definir o operador traço e, à custa deste operador, dar uma interpretação aos valores na fronteira, $u|_{\partial\Omega}$, de uma função u definida em Ω .

Assim, para que tal seja possível é necessário que $\Omega \in EW^{k,p}$ para cada $k \in \mathbb{N}$ e $1 \leq p \leq \infty$.

Contudo, por vezes é difícil verificar que um domínio está nessas condições. No Capítulo 4 trabalhar-se-á com domínios Ω limitados por fractais. Nestes e noutros casos considera-se o espaço

$$W^{k,p}[\Omega] = \left\{ u \in W^{k,p}(\Omega) : \exists g \in W^{k,p}(\mathbb{R}^n) \text{ tal que } g|_{\Omega} = u \text{ q.t.p.} \right\},$$

isto é, o espaço das funções que são restrições a Ω de elementos de $W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$.

A norma em $W^{k,p}[\Omega]$ é dada por

$$\|u\|_{W^{k,p}[\Omega]} = \inf \left\{ \|g\|_{W^{k,p}(\mathbb{R}^n)} : g|_{\Omega} = u \text{ q.t.p.} \right\}.$$

Da definição de $W^{k,p}[\Omega]$ conclui-se que

$$W^{k,p}[\Omega] \subset W^{k,p}(\Omega),$$

e a igualdade verifica-se em domínios com a propriedade de extensão, por exemplo em domínios (ϵ, δ) uniformemente contínuos.

1.2.2 Operador traço

Dada uma função contínua, a restrição da função a um subconjunto do seu domínio é dada pontualmente. Quando se tem uma função num espaço de Sobolev definida em q.t.p. e se precisa de considerar a restrição dessa função a um conjunto de medida zero, que interpretação deve ser dada neste caso?

No que segue apresentam-se alguns conceitos e resultados que permitem definir o operador traço.

Definição 1.2.4. Seja $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ fechado não vazio e $d \in]0, n]$. Diz-se que Γ é um conjunto- d se existem constantes c_1, c_2 positivas tais que para todo $\gamma \in \Gamma$ e todo o $r \in]0, 1]$, se tem

$$c_1 r^d \leq \mathcal{H}^d(B(\gamma, r) \cap \Gamma) \leq c_2 r^d,$$

onde \mathcal{H}^d é a medida de Hausdorff de dimensão d e $B(\gamma, r)$ é a bola fechada centrada em γ e raio r .

Seja $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto- d . Dada uma função φ a pertencer a $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, define-se traço de φ em Γ como a restrição pontual de φ a Γ , isto é, $tr_\Gamma \varphi = \varphi|_\Gamma$. Uma vez que $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ é denso em $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ para $1 \leq p < \infty$, aproxima-se $f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ por $\varphi_j \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $j \in \mathbb{N}$, e define-se traço de f em Γ como sendo o limite de $(tr_\Gamma \varphi_j)$ sempre que existe uma constante $c > 0$ tal que

$$\|tr_\Gamma \varphi\|_{L^p(\Gamma)} \leq c \|\varphi\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}, \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n),$$

onde $L^p(\Gamma)$ é considerado em relação à medida \mathcal{H}^d . Assim definido, $tr_\Gamma f \in L^p(\Gamma)$.

Definição 1.2.5. Diz-se que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um domínio com interior regular se $\exists c > 0$ tal que, para todo o $x \in \partial\Omega$ e para todo o cubo Q centrado em x e de lado $l \leq 1$, se tem

$$|\Omega \cap Q| \geq c|Q|. \quad (1.2.1)$$

É fácil de verificar que esta definição é equivalente a afirmar que Ω é um conjunto- d , com $d = n$, sem necessidade de impor que Ω seja fechado.

Teorema 1.2.6. ([13]; p.55) *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio com interior regular, tal que a sua fronteira $\partial\Omega$ é um conjunto- d com $d < n$. Se $p > 1$ e $p > n - d$, dado $u \in W^{1,p}[\Omega]$, então toda a função $f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ tal que $f|_{\Omega} = u$ tem o mesmo traço em $\partial\Omega$.*

Definição 1.2.7. Sejam Ω um domínio com interior regular cuja fronteira, $\partial\Omega$, é um conjunto- d , $p > 1$ e $p > n - d$. A função Tru de $L^p(\partial\Omega)$ definida por

$$Tru \equiv tr_{\partial\Omega} f$$

com $f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ tal que $f|_{\Omega} = u$, dá-se o nome de **traço** de u em $\partial\Omega$ e, para \mathcal{H}^d quase todo $x \in \partial\Omega$, vem

$$Tru(x) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{|B(x, r) \cap \Omega|} \int_{B(x, r) \cap \Omega} u(y) dy. \quad (1.2.2)$$

Dado $u \in W^{1,p}[\Omega] \cap \overline{C}(\Omega)$, seja Eu uma extensão de u a \mathbb{R}^n . É possível usar uma extensão E_1u de forma a que $E_1u = Eu$ em q.t.p. e que em $\partial\Omega$ tome os valores que se obtêm por extensão por continuidade de u à fronteira. Neste caso identificam-se os valores na fronteira, $u|_{\partial\Omega}$, como sendo $E_1u|_{\partial\Omega}$, visto E_1u ser contínua.

Teorema 1.2.8. ([25]; p.133) *Se Ω é um domínio limitado cuja fronteira é de Lipschitz e $1 \leq p < \infty$, então existe um operador linear contínuo*

$$Tr : W^{1,p}(\Omega) \longrightarrow L^p(\partial\Omega)$$

tal que

$$Tru = u \text{ em } \partial\Omega,$$

para todo o $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, onde $C(\overline{\Omega})$ é o espaço das funções uniformemente contínuas em Ω .

Teorema 1.2.9. ([13]; p.59) *Seja Ω um domínio com interior regular e tal que a fronteira, $\partial\Omega$, é um conjunto- d . Se $p > 1$ e $p > n - d$, então o operador traço*

$$Tr : W^{1,p}[\Omega] \rightarrow L^p(\partial\Omega)$$

é um operador linear contínuo.

Definição 1.2.10. Um domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ diz-se minimamente regular se $\text{int}(\overline{\Omega}) = \Omega$.

Dado Ω aberto e limitado e $p \geq 2$ vem $W^{1,p}(\Omega) \subset W^{1,2}(\Omega)$. Aplicando os resultados apresentados por Triebel em ([49];p156,157) ao caso particular dos espaços de Sobolev com $p \geq 2$ (é possível visto que $W^{1,2}(\Omega)$ coincide com o espaço $B_{2,2}^1(\Omega)$) conclui-se que, enfraquecendo a condição de domínio interior regular para esses valores de p e usando apenas domínios minimamente regulares que sejam limitados, é possível definir traço de acordo com a Definição 1.2.7.

Observação 1.2.11. Se existem partes da fronteira $\partial\Omega$ que são conjuntos- d para valores de d diferentes, de acordo com os resultados apresentados, nada se pode concluir sobre a existência de traço. Neste caso, se for possível considerar uma extensão de Ω , Ω_e , tal que a parte da fronteira, $\partial_1\Omega$, onde se pretende definir traço, verifique $\partial_1\Omega \subset \partial\Omega_e$ e $\partial\Omega_e$ seja conjunto- d , usando (1.2.2) vem

$$Tru(x) := Trv(x) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{|B(x,r) \cap \Omega|} \int_{B(x,r) \cap \Omega} u(y) dy,$$

para $x \in \partial_1\Omega$, $u \in W^{1,p}[\Omega]$ e $v \in W^{1,p}[\Omega_e]$ tais que $u = v$ em Ω .

Nos Capítulos 3 e 4 sempre que se refere a classe \mathcal{A}^p para $1 \leq p \leq \infty$ entende-se a classe das funções que estão no espaço de Sobolev e para as quais é possível dar uma interpretação às condições de fronteira através do traço. Seja

$$\mathcal{A}^p := \left\{ u \in W^{1,p}[\Omega] \cap \overline{C}(\Omega) : u|_{\partial\Omega} = u_0 \right\}. \quad (1.2.3)$$

No caso do domínio ser de Lipschitz, de acordo com o Teorema 1.2.8 vem

$$\mathcal{A}^p = \left\{ u \in W^{1,p}(\Omega) : u|_{\partial\Omega} = u_0 \right\}.$$

Para domínios cuja fronteira é um conjunto- d

$$\mathcal{A}^p = \left\{ u \in W^{1,p}[\Omega] : u|_{\partial\Omega} = u_0 \right\}$$

para $p > 1$ ou $p \geq 2$ consoante Ω seja um domínio com interior regular ou seja um domínio minimamente regular.

Nos casos em que não está garantida a existência de traço trabalha-se com \mathcal{A}^p definida em (1.2.3).

1.2.3 Exemplos de domínios onde existe Tr

Nesta secção apresentam-se exemplos de domínios $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ cuja fronteira pode ser fractal e que estão nas condições de definir o operador traço uma vez que, no Capítulo 4, trabalhar-se-á com problemas variacionais, face ao fenómeno de Lavrentiev, definidos em domínios deste tipo.

Exemplo 1.2.12. Considere-se o domínio $\Omega = \{(s, t) \in \mathbb{R}^2 : s \in]0, 1[\wedge \theta_1(s) < t < \theta_2(s)\}$ onde as funções θ_1 e θ_2 são tais que $\partial\Omega$ é de Lipschitz. Nestas condições, $\Omega \in EW^{1,p}$ para $1 \leq p \leq \infty$ e, conseqüentemente, $W^{1,p}[\Omega] = W^{1,p}(\Omega)$. Além disso, usando o Teorema 1.2.8, o traço de uma função de $W^{1,p}(\Omega)$ está bem definido para domínios deste tipo.

Nota 1.2.13. Não basta que θ_1 e θ_2 sejam lipschitzianas para que $\Omega \in EW^{1,p}$. Por exemplo, considere-se $\varepsilon > 0$, o domínio $\Omega = \{(s, t) \in \mathbb{R}^2 : s \in]0, 1[\wedge 0 < t < s^{1+3\varepsilon}\}$, a função $u(s, t) = s^{-\frac{\varepsilon}{2+\varepsilon}}$ e o espaço $W^{1,2+\varepsilon}(\Omega)$.

Como

$$\int_{\Omega} |u(s, t)|^{2+\varepsilon} dt ds = \int_{\Omega} s^{-\varepsilon} dt ds = \frac{1}{2+2\varepsilon}$$

e

$$\int_{\Omega} |\nabla u(s, t)|^{2+\varepsilon} dt ds = \left(\frac{\varepsilon}{2+\varepsilon}\right)^{2+\varepsilon} \int_{\Omega} s^{-2-2\varepsilon} dt ds = \frac{\varepsilon^{1+\varepsilon}}{(2+\varepsilon)^{2+\varepsilon}},$$

conclui-se que $u \in W^{1,2+\varepsilon}(\Omega)$.

Como $W^{1,p}(\mathbb{R}^2) \subset C(\mathbb{R}^2)$ para $p > 2$, toda a função que pertence a $W^{1,2+\varepsilon}(\mathbb{R}^2)$ é contínua. Se existisse uma extensão Eu seria contínua, o que é impossível. Assim, u não admite extensão a \mathbb{R}^2 .

Como se referiu anteriormente, caso não seja possível provar a existência do operador extensão trabalha-se em $W^{1,p}[\Omega]$. Ultrapassado esse problema, para a existência do operador traço é suficiente que a fronteira seja conjunto- d , com d nas condições do Teorema 1.2.9, e o domínio seja interior regular, ou o domínio minimamente regular se $p \geq 2$. No que diz respeito à fronteira ser conjunto- d , nos casos em que se precisa do traço só em parte da fronteira, basta que essa parte seja conjunto- d , de acordo com a Observação 1.2.11.

Exemplo 1.2.14. Considere-se o domínio $\left\{ (s, t) \in \mathbb{R}^2 : s \in]-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}[\wedge \eta_1(s) < t < \eta_2(s) \right\}$ com $\eta_2(s) = W_{V,H}(s + \frac{1}{2})$ e $\eta_1(s) = -W_{V,H}(s + \frac{1}{2})$ e onde $W_{V,H}$ é a função definida em ([15];p.12). Como é indicado nesta referência bibliográfica, esta função é o limite de uma sucessão de funções que se obtém por sucessivas iterações. Por exemplo, na iteração j obtém-se um domínio cuja fronteira é formada por segmentos de recta que são diagonais de rectângulos de comprimento 12^{-j} e altura 4^{-j} . Nas Figuras 1.1-1.3 apresentam-se os gráficos da função inicial e das duas primeiras iterações.

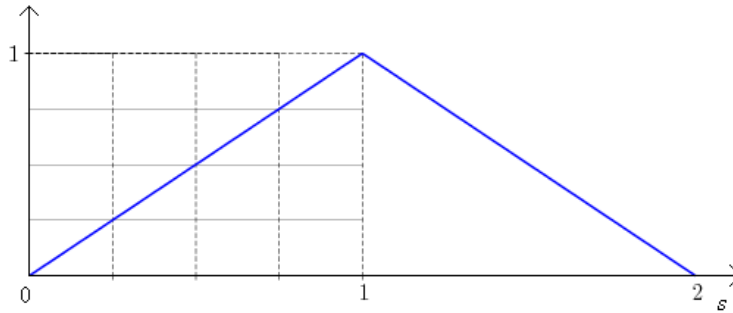


Figura 1.1: Gráfico inicial.

Carvalho em ([15];p.12) prova que o gráfico de $W_{V,H}$ é um conjunto- d com $1 < d < 2$.

Seja $\Omega = \left\{ (s, t) \in \mathbb{R}^2 : s \in]0, 1[\wedge \theta_1(s) < t < \theta_2(s) \right\}$ com $\theta_2(s) = \eta_2(s)|_{[0,1]}$ e $\theta_1(s) = \eta_1(s)|_{[0,1]}$. Da forma como as funções η_1 e η_2 estão definidas conclui-se que o domínio Ω é obtido por um processo iterativo.

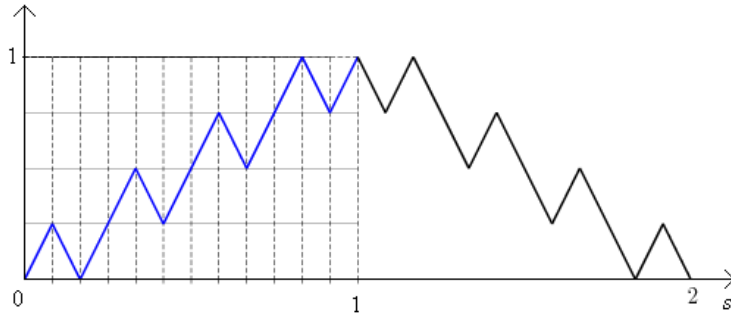


Figura 1.2: 1ª iteração.

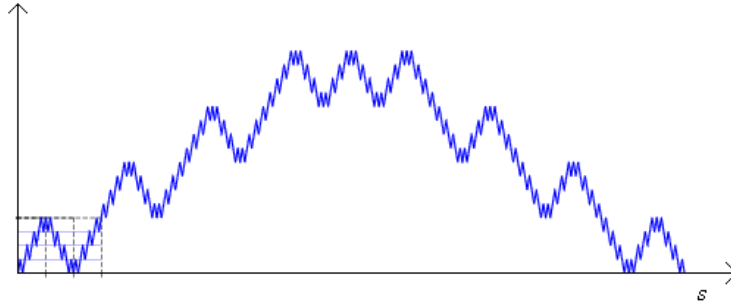


Figura 1.3: 2ª iteração.

A fronteira de Ω é a união de duas curvas que são conjuntos- d , com $1 < d < 2$, e de dois segmentos de recta que são conjuntos- d , com $d = 1$. Usando a Observação 1.2.11, com o domínio $\Omega_e = \{(s, t) \in \mathbb{R}^2 : s \in]-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}[\wedge \eta_1(s) \leq t \leq \eta_2(s)\}$, conclui-se que se existir traço em $\partial\Omega_e$ então também existe traço em $\partial\Omega \cap \partial\Omega_e$.

Como o domínio Ω_e é minimamente regular e a sua fronteira um conjunto- d , com $1 < d < 2$, conclui-se que para $v \in W^{1,p}[\Omega_e]$, com $p \geq 2$, o traço de v em $\partial\Omega_e$ está bem definido e, consequentemente, também o traço de $u \in W^{1,p}[\Omega]$ na parte da fronteira que limita superiormente e inferiormente Ω .

Os domínios apresentados até agora são limitados superiormente e inferiormente por gráfi-

cos de funções. Considere-se agora o caso de domínios fractais cuja fronteira não é gráfico de funções.

Exemplo 1.2.15. Considere-se o domínio floco de neve de Von Koch. Pode-se imaginar a sua construção a partir de um triângulo equilátero e submeter cada lado a alterações recorrentes, como a seguir se descreve.

Partindo de um segmento de recta (lado de um triângulo equilátero), constroem-se quatro segmentos de recta de comprimento igual a um terço do comprimento do segmento inicial. Estes quatro segmentos substituem o segmento de recta inicial e obtém-se assim a 1^a iteração. Aplica-se este processo a todos os segmentos de recta obtidos na 1^a iteração e obtém-se a 2^a iteração, tal como se pode ver na Figura 1.4. Aplicando este processo repetidamente a todos os segmentos de recta que vão sendo sucessivamente construídos, obtém-se as sucessivas iterações (ver Figura 1.5). A curva de Koch é o limite para o qual tende esta construção, repetindo as operações referidas, sucessivamente, para cada segmento. Se se aplicar a cada lado do triângulo equilátero o que foi descrito para um segmento de recta, obtém-se o domínio floco de neve de Von Koch. Nas Figuras 1.4-1.5 apresentam-se 4 iterações para a obtenção do domínio referido.

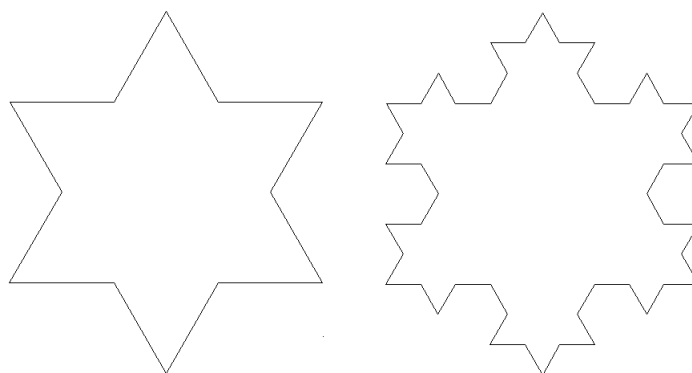


Figura 1.4: 1^a e 2^a iterações.

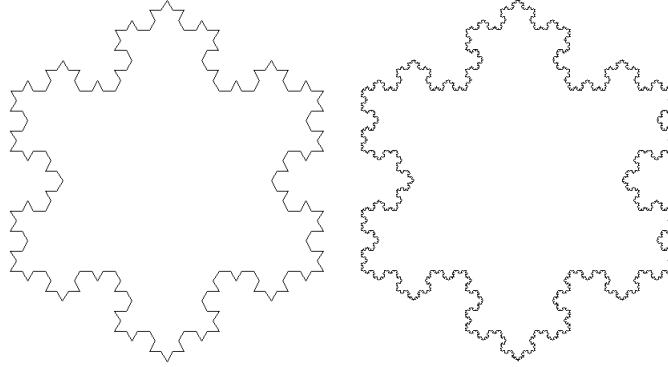


Figura 1.5: 3ª e 5ª iterações.

Neste domínio é possível definir o operador extensão uma vez que é um domínio (ϵ, δ) localmente uniforme ([31]). Além disso, este domínio é minimamente regular e a sua fronteira um conjunto- d , com $1 < d < 2$. Assim, para $p \geq 2$ é possível definir o operador traço.

1.3 Lema de integração parcial

Sejam Ω um aberto de \mathbb{R}^2 e $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Existem resultados que permitem concluir que, sob condições adequadas, as derivadas parciais de u (clássica e fraca) coincidem em quase todo o Ω . Nos Capítulos 3 e 4 é necessário integrar uma derivada parcial fraca ao longo dum segmento de recta paralelo a um dos eixos coordenados e contido em $\overline{\Omega}$. No que se segue prova-se o Lema de integração parcial, o qual permite obter o valor pretendido. Para provar este lema recorre-se a alguns resultados conhecidos, os quais se apresentam no que se segue. Começa-se por apresentar um processo de aproximar uma função de $W^{1,p}(\Omega)$ por funções \mathcal{C}^∞ .

Teorema 1.3.1. ([25];p.123) *Sejam $V \subset \mathbb{R}^n$ aberto, $f \in L^1_{loc}(V)$, $\varepsilon > 0$ e f_ε , regularizante de f , definida pela convolução,*

$$f_\varepsilon = \eta_\varepsilon * f,$$

para $\eta_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n} \eta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$, $x \in \mathbb{R}^n$ com $\eta \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\eta(x) = \begin{cases} c e^{\frac{1}{|x|^2-1}}, & |x| < 1, \\ 0, & |x| \geq 1. \end{cases}$$

Escolhe-se a constante c de modo que $\int_{|x|<1} c e^{\frac{1}{|x|^2-1}} dx = 1$.

i. Para cada $\varepsilon > 0$, os regularizantes $f_\varepsilon \in C^\infty(V_\varepsilon)$, onde $V_\varepsilon := \{x \in V : \text{dist}(x, \partial V) > \varepsilon\}$.

ii. Se $f \in C(V)$, então

$$f_\varepsilon \rightarrow f \text{ com } \varepsilon \rightarrow 0^+,$$

uniformemente nos subconjuntos compactos de V .

iii. Em particular, se $f \in W_{loc}^{1,p}(V)$ para algum $1 \leq p < \infty$, então

$$f_\varepsilon \rightarrow f \text{ quando } \varepsilon \rightarrow 0^+$$

em $W_{loc}^{1,p}(V)$.

Teorema 1.3.2. ([25]; p.235) Seja $f \in W_{loc}^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ para algum $n < p \leq \infty$. Então, f é diferenciável \mathcal{L}^n q.t.p., e a sua derivada coincide \mathcal{L}^n q.t.p. com a derivada fraca.

Teorema 1.3.3. ([8]; p.58) Sejam $g, \{g_n\}_{n=1}^\infty$ em $L^p(\Omega)$, com $1 \leq p \leq \infty$, tais que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|g_n - g\|_{L^p} = 0.$$

Nestas condições existe uma subsucessão $\{g_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ tal que:

i. $g_{n_k}(x) \rightarrow g(x)$ q.t. Ω ;

ii. $|g_{n_k}(x)| \leq h(x)$, $\forall k$ q.t. Ω com $h \in L^p(\Omega)$.

Teorema 1.3.4. ([8]; p.155) *Sejam $u \in W^{1,p}(\Omega)$ e $G \in C^1(\mathbb{R})$ tal que $G(0) = 0$ e $|G'(s)| \leq M, \forall s \in \mathbb{R}$. Então, $G \circ u \in W^{1,p}(\Omega)$ e*

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (G \circ u) = (G' \circ u) \frac{\partial u}{\partial x_i} \quad q.t. \Omega.$$

No que se segue, para provar o Lema de integração parcial considera-se $\Omega =]a_0, b_0[\times]a_1, b_1[$, $p \in]2, +\infty]$, $u \in W^{1,p}(\Omega)$, $u(s, a_1) = u_0$ e $u(s, b_1) = u_1$, para q. t. $s \in [a_0, b_0]$.

Recorde-se que, com p e Ω nestas condições, $W^{1,p}(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$, o que permite concluir que existe sempre um representante contínuo de u que se estende continuamente (e univocamente) à fronteira, e as condições de fronteira $u(s, a_1) = u_0$ e $u(s, b_1) = u_1$, neste caso, são a restrição desse representante à parte da fronteira correspondente a $t = a_1$ e $t = b_1$.

Lema 1.3.5. (*Lema de integração parcial*) *Sejam $v \in W^{1,\infty}(\Omega)$, a e b duas funções definidas em $[a_0, b_0]$ e mensuráveis tais que $a_1 \leq a(s) \leq b(s) \leq b_1$ para $s \in [a_0, b_0]$ e v_t uma derivada parcial fraca de v . Então,*

$$\int_{a(s)}^{b(s)} v_t(s, t) dt = v(s, b(s)) - v(s, a(s))$$

para q.t. $s \in [a_0, b_0]$.

Demonstração Considere-se que $v \in W^{1,\infty}(\Omega)$, $v(s, a_1) = u_0$, $v(s, b_1) = u_1$ para q.t. $s \in [a_0, b_0]$ e $2 < p < \infty$. Uma vez que $W^{1,\infty}(\Omega) \subseteq W^{1,p}(\Omega)$, então $v \in W^{1,p}(\Omega)$. Seja $V \subset \mathbb{R}^2$ um aberto cuja fronteira é de Lipschitz e tal que $\Omega \subset\subset V$ (isto é, $\overline{\Omega} \subset V$) e seja Ev uma extensão de v a \mathbb{R}^2 (do Teorema 1.2.2 conclui-se que existe uma extensão nestas condições). Assim, $Ev \in W^{1,p}(\mathbb{R}^2)$, $Ev(x) = v(x), x \in \Omega$ e $\text{supp} Ev \subset V$. Uma vez que $Ev|_V$ e v admitem representantes que se estendem por continuidade à fronteira (os quais designamos por $Ev|_V$ e v , respectivamente), então $Ev(x) = v(x)$ em $\overline{\Omega}$.

Considere-se $\varepsilon > 0$ e a sucessão de regularizantes, v_ε , de $Ev|_V$.

Do Teorema 1.3.1 iii., com $f = Ev|_V$ e $f_\varepsilon = v_\varepsilon$,

$$v_\varepsilon \rightarrow Ev|_V$$

em $W_{loc}^{1,p}(V)$, quando $\varepsilon \rightarrow 0^+$.

Seja $\varepsilon = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$ e $v_\varepsilon = v_n$. Por aplicação do Teorema de Fubini resulta

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{a_0}^{b_0} \left(\int_{a(s)}^{b(s)} (|v_n(s, t) - v(s, t)|^p + |(v_n)_t(s, t) - v_t(s, t)|^p) dt \right) ds = 0.$$

Do Teorema 1.3.3, com $g_n(s) = \int_{a(s)}^{b(s)} (|v_n(s, t) - v(s, t)|^p + |(v_n)_t(s, t) - v_t(s, t)|^p) dt$, $g = 0$ e $p = 1$, conclui-se que existe uma subsucessão $\{g_{n_k}\}$ tal que $g_{n_k} \rightarrow 0$ para $s \in [a_0, b_0] \setminus M$, onde M é um subconjunto de medida zero. Assim, para $s \in [a_0, b_0] \setminus M$,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{a(s)}^{b(s)} (|v_{n_k}(s, t) - v(s, t)|^p + |(v_{n_k})_t(s, t) - v_t(s, t)|^p) dt = 0$$

e, consequentemente,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{a(s)}^{b(s)} |v_{n_k}(s, t) - v(s, t)|^p dt = 0$$

e

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{a(s)}^{b(s)} |(v_{n_k})_t(s, t) - v_t(s, t)|^p dt = 0. \quad (1.3.4)$$

Por outro lado, para $s \in [a_0, b_0]$,

$$\begin{aligned} \left| \int_{a(s)}^{b(s)} v_t(s, t) dt - (v(s, b(s)) - v(s, a(s))) \right| &\leq \int_{a(s)}^{b(s)} |v_t(s, t) - (v_{n_k})_t(s, t)| dt + \\ &+ \left| \int_{a(s)}^{b(s)} (v_{n_k})_t(s, t) dt - (v(s, b(s)) - v(s, a(s))) \right| \end{aligned} \quad (1.3.5)$$

e

$$\begin{aligned} \left| \int_{a(s)}^{b(s)} (v_{n_k})_t(s, t) dt - (v(s, b(s)) - v(s, a(s))) \right| &\leq |v_{n_k}(s, b(s)) - v(s, b(s))| + \\ &+ |v_{n_k}(s, a(s)) - v(s, a(s))| \end{aligned} \quad (1.3.6)$$

Do Teorema 1.3.1 i. e ii. (com $f_\varepsilon = v_{n_k}$) resulta que $v_{n_k} \rightarrow v$ uniformemente em $\bar{\Omega}$, o que permite concluir que, para $\delta > 0$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para $k \geq k_0$,

$$\left| \int_{a(s)}^{b(s)} (v_{n_k})_t(s, t) dt - (v(s, b(s)) - v(s, a(s))) \right| < \frac{\delta}{2}, \quad (1.3.7)$$

para todo $s \in [a_0, b_0]$.

Além disso, para cada $s \in [a_0, b_0]$, da desigualdade de Hölder vem

$$\int_{a(s)}^{b(s)} |v_t(s, t) - (v_{n_k})_t(s, t)| dt \leq \left(\int_{a(s)}^{b(s)} |v_t(s, t) - (v_{n_k})_t(s, t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \cdot |b_1 - a_1|^{\frac{p-1}{p}},$$

e de (1.3.4) existe $k_1 \in \mathbb{N}$ tal que, para $k \geq k_1$,

$$\int_{a(s)}^{b(s)} |v_t(s, t) - (v_{n_k})_t(s, t)| dt < \frac{\delta}{2}. \quad (1.3.8)$$

Assim, de (1.3.5)-(1.3.8), para todo $\delta > 0$ existe $k_2 \in \mathbb{N}$ tal que, para $k \geq k_2$,

$$\left| \int_{a(s)}^{b(s)} v_t(s, t) dt - (v(s, b(s)) - v(s, a(s))) \right| < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta,$$

e, consequentemente,

$$\left| \int_{a(s)}^{b(s)} v_t(s, t) dt - (v(s, b(s)) - v(s, a(s))) \right| = 0,$$

para quase todo $s \in [a_0, b_0]$. ■

Capítulo 2

Existência de minimizante relaxado

2.1 Introdução

Sejam l e f duas funções tais que $l : [t_1, t_2] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \longrightarrow \mathbb{R}$ e $f : [t_1, t_2] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Considere-se o problema de Bolza do controlo óptimo que consiste em minimizar funcionais do tipo

$$J[x, u] = g(t_1, x(t_1), t_2, x(t_2)) + \int_{]t_1, t_2[} l(t, x(t), u(t)) dt, \quad (2.1.1)$$

com o par $(x(\cdot), u(\cdot))$ a satisfazer o sistema dinâmico

$$x'(t) = f(t, x(t), u(t)), \text{ q.t. } t \in [t_1, t_2], \quad (2.1.2)$$

e as condições de fronteira

$$(t_1, x(t_1), t_2, x(t_2)) \in B \subset \mathbb{R}^{2n+2}. \quad (2.1.3)$$

A variável t é a variável independente, designada por tempo, $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$, designada por trajectória, $(t, x(t)) \in A \subset \mathbb{R}^{n+1}$ e $u(t) = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_r(t)) \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^r$ para q.t. $t \in [t_1, t_2]$ designada por controlo.

No caso de $g \equiv 0$ o problema é conhecido por problema de Lagrange do controlo óptimo e se $l \equiv 0$ por problema de Mayer do controlo óptimo.

Quando as funções l e f não dependem explicitamente de t diz-se que o problema de controlo óptimo é autónomo.

Nota 2.1.1. Um problema do cálculo das variações do tipo

$$J[x] = \int_{]t_1, t_2[} l(t, x(t), x'(t)) dt \longrightarrow \min$$

com

$$x \in \mathcal{A}^p$$

pode ser reescrito como um problema de controlo óptimo. Introduzindo o controlo $u(t) = x'(t)$ obtém-se o problema do controlo óptimo

$$J[x, u] = \int_{]t_1, t_2[} l(t, x(t), u(t)) dt \longrightarrow \min$$

com

$$x'(t) = u(t), \quad u(t) \in \mathbb{R}^n$$

e

$$(t, x(t)) \in A \text{ e } (t_1, x(t_1), t_2, x(t_2)) \in B \subset \mathbb{R}^{2n+2}.$$

Definição 2.1.2. Diz-se que o par (x, u) é um par admissível ou solução admissível (designa-se por $(x(\cdot), u(\cdot))$ apenas quando for necessário) para o problema (2.1.1)-(2.1.3) se satisfaz as seguintes condições:

- i. $x \in W^{1,1}(]t_1, t_2[)$;
- ii. u mensurável e $u(t) \in \mathcal{U}$ para q.t. $t \in [t_1, t_2]$;
- ii. o par (x, u) é solução do sistema (2.1.2) para q.t. $t \in [t_1, t_2]$;
- iv. a função $t \rightarrow l(t, x(t), u(t)) \in L^1([t_1, t_2])$;
- v. x satisfaz as condições de fronteira (2.1.3).

Seja \mathcal{P} o conjunto de todos os pares admissíveis. O problema de controlo óptimo consiste em determinar, se possível, um par $(\bar{x}, \bar{u}) \in \mathcal{P}$ que verifique $J[\bar{x}, \bar{u}] \leq J[x, u]$ para todo o par $(x, u) \in \mathcal{P}$. Se existir um par $(\bar{x}, \bar{u}) \in \mathcal{P}$ nessas condições, designa-se por *minimizante*.

Existem resultados de existência de minimizantes, que normalmente estão associados à hipótese de convexidade e de coercividade de l no caso do problema de Lagrange e de f no problema de Mayer, em relação ao controlo.

O Teorema de Filippov é um teorema geral de existência de minimizantes para problemas de controlo óptimo para controlos limitados. Em [18] encontram-se várias formulações deste teorema consoante se está na presença de um Problema de Lagrange ou de um Problema de Mayer.

Seja $A = [t_1, t_2] \times A_1$ com $A_1 \subset \mathbb{R}^n$. Para cada $t \in [t_1, t_2]$, designa-se por $A(t) = \{x \in \mathbb{R}^n : (t, x) \in A\}$. Dado $(t, x) \in A$ seja $\mathcal{U}(t, x) \subset \mathbb{R}^r$ o conjunto tal que $u(t) \in \mathcal{U}(t, x)$. Seja M o conjunto definido por $M = \{(t, x, u) \in \mathbb{R}^{1+n+r} : (t, x) \in A \wedge u \in \mathcal{U}(t, x)\}$. Considere-se o problema de minimizar o funcional

$$J[x, u] = g(t_1, x(t_1), t_2, x(t_2)) \quad (2.1.4)$$

para $x \in W^{1,1}([t_1, t_2])$ e u mensurável que satisfazem o sistema dinâmico

$$x'(t) = f(t, x(t), u(t)), \text{ para q.t. } t \in [t_1, t_2], \quad (2.1.5)$$

$$(t, x(t)) \in A, \quad u(t) \in \mathcal{U}(t, x(t)) \text{ para q.t. } t \in [t_1, t_2], \quad (t_1, x(t_1), t_2, x(t_2)) \in B. \quad (2.1.6)$$

Teorema 2.1.3. (*Teorema de Filippov para problemas de Mayer*) ([18]; p.311) *Sejam A compacto, B fechado, M compacto, f contínua em M , g semicontínua em B e para $x \in A(t)$ os conjuntos $Q(t, x) = \{z : z = f(t, x, u), u \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^n$ são convexos para q.t. $t \in [t_1, t_2]$. Nestas condições, o problema de Mayer definido em (2.1.4)-(2.1.6) tem um mínimo absoluto no conjunto dos pares admissíveis.*

No caso de falhar a convexidade, por vezes resolve-se o problema da existência de minimizantes trabalhando com o problema relaxado, designando-se neste caso o minimizante

por minimizante relaxado. Em [18] são apresentados resultados de existência deste tipo de minimizantes.

Os resultados de existência de minimizantes garantem que existem minimizantes absolutamente contínuos, não necessariamente lipschitzianos. A presença destes minimizantes pode levar à ocorrência do fenómeno de Lavrentiev. Este fenómeno ocorre quando o ínfimo do funcional depende da regularidade imposta às trajectórias admissíveis, e assume nas áreas do cálculo das variações e do controlo óptimo uma grande relevância teórica e consequências importantes para métodos numéricos. É, assim, da maior importância obter resultados de regularidade lipschitziana que permitam excluir este tipo de ocorrência. Guerra e Sarychev [29] provaram a regularidade lipschitziana de minimizantes relaxados usando a compactificação de Loeb.

No que se segue pretende-se provar a existência de minimizantes relaxados usando uma compactificação desse tipo.

2.2 Problema relaxado

Definição 2.2.1. Dada uma função $f : A \times \mathbb{R}^r \longrightarrow \mathbb{R}$, com $A \subset \mathbb{R}^m$, diz-se que $f(x, u)$ é convexa em relação a u se para todo o $x \in A$ se verifica

$$f(x, \alpha u_1 + (1 - \alpha)u_2) \leq \alpha f(x, u_1) + (1 - \alpha)f(x, u_2),$$

para todo $\alpha \in [0, 1]$ e $u_1, u_2 \in \mathbb{R}^r$.

Definição 2.2.2. Seja E um subconjunto de \mathbb{R}^n . O invólucro convexo de E é o menor convexo de \mathbb{R}^n que contém E e denota-se por $\text{conv}E$.

Teorema 2.2.3. (*Teorema de Caratheodory*) ([18]; p. 287) *Seja $E \subset \mathbb{R}^n$. Então, qualquer x que pertence ao invólucro convexo de E pode ser representado por uma combinação convexa de γ elementos de E , com $\gamma \leq n + 1$.*

Sejam $l : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \longrightarrow \mathbb{R}$ e $f : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \longrightarrow \mathbb{R}^n$ funções contínuas em relação a todas as variáveis e $T \in [0, +\infty[$ fixo. Considere-se o problema de Lagrange do controle ótimo, P^0

$$J^0[x, u] = \int_0^T l(t, x(t), u(t)) dt \longrightarrow \min \quad (2.2.7)$$

com o sistema dinâmico

$$x'(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad (2.2.8)$$

e as condições de fronteira

$$x(0) = x_0, x(T) = x_1. \quad (2.2.9)$$

Consideram-se as seguintes hipóteses:

- Para cada compacto $X \subset \mathbb{R}^n$ existe uma função limitada inferiormente $\phi : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{\xi \rightarrow +\infty} \frac{\phi(\xi)}{\xi} = +\infty, \text{ e } l(t, x, u) \geq \phi(\|f(t, x, u)\|), \quad (2.2.10)$$

para todo o $(t, x) \in [0, T] \times X$ e $u \in \mathbb{R}^r$.

- Para cada compacto $X \subset \mathbb{R}^n$

$$\lim_{\|u\| \rightarrow +\infty} l(t, x, u) = +\infty, \quad (2.2.11)$$

uniformemente em relação a $(t, x) \in [0, T] \times X$.

No que se segue, as condições (2.2.10) e (2.2.11) são designadas por condições de coercividade.

Nota 2.2.4. Se o Lagrangiano l do problema (2.2.7)-(2.2.9) satisfaz a condição de coercividade (2.2.10) então existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $l(t, x(t), u(t)) \geq c$. Por outro lado, ao adicionar uma constante ao Lagrangiano do problema (2.2.7)-(2.2.9) não se alteram os minimizantes. Assim, minimizar

$$\int_0^T l(t, x(t), u(t)) dt,$$

sob as condições enunciadas (sistema dinâmico e condições de fronteira), é equivalente a minimizar

$$\int_0^T (l(t, x(t), u(t)) + (1 - c)) dt.$$

Sendo assim, no que se segue considera-se, sem perda de generalidade, que $l(t, x(t), u(t)) \geq 1$.

Dado um problema de Lagrange do tipo apresentado em (2.2.7)-(2.2.8) não convexo, o mesmo é dizer que o Lagrangiano l não é convexo em relação a u , pode-se obter um problema convexo associado, P^r , designado por problema relaxado ou, para alguns autores, problema generalizado. Para tal usa-se a convexificação do Lagrangiano e da função do sistema dinâmico.

Considera-se, para (t, x) fixo, a aplicação de \mathbb{R}^r para \mathbb{R}^{n+1} tal que

$$u \rightarrow (l(t, x, u), f(t, x, u)).$$

Seja (t, x) fixo. Usando o Teorema de Caratheodory conclui-se que um elemento do invólucro convexo do conjunto $\{(l(t, x, u), f(t, x, u)), u \in \mathbb{R}^r\}$ pode ser representado da forma $(L(t, x, q, U), F(t, x, q, U))$ onde

$$L(t, x, q, U) = \sum_{i=1}^{n+2} q_i l(t, x, u^i), \quad (2.2.12)$$

$$F(t, x, q, U) = \sum_{i=1}^{n+2} q_i f(t, x, u^i) \quad (2.2.13)$$

com, $U = (u^1, u^2, \dots, u^{n+2}) \in \mathbb{R}^{r(n+2)}$, $q = (q_1, q_2, \dots, q_{n+2}) \in \Sigma^{n+1}$, onde Σ^{n+1} designa o simplex de dimensão $n + 1$,

$$\Sigma^{n+1} = \{(q_1, q_2, \dots, q_{n+2}) : q_1 + q_2 + \dots + q_{n+2} = 1, q_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n + 2\}.$$

O problema relaxado consiste em minimizar o funcional

$$\begin{aligned} J^r[x(\cdot), q(\cdot), U(\cdot)] &= \int_0^T L(t, x(t), q(t), U(t)) dt \\ &= \int_0^T \sum_{i=1}^{n+2} q_i(t) l(t, x(t), u^i(t)) dt, \end{aligned} \quad (2.2.14)$$

com o sistema dinâmico

$$\begin{aligned} x'(t) &= F(t, x(t), q(t), U(t)) \\ &= \sum_{i=1}^{n+2} q_i(t) f(t, x(t), u^i(t)) \end{aligned} \quad (2.2.15)$$

e as condições de fronteira

$$x(0) = x_0, x(T) = x_1. \quad (2.2.16)$$

Para este problema x é a trajectória e q e U são as componentes do controlo. Neste caso, o controlo $(q, U) \in \mathcal{U} = \Sigma^{n+1} \times \mathbb{R}^{r(n+2)}$. Assim, a solução relaxada é uma solução do tipo $(x(t), q(t), U(t))$.

No problema (2.2.14)-(2.2.16) há convexidade do Lagrangiano em relação ao controlo. Contudo, o conjunto \mathcal{U} não é compacto. Além disso, ao passar do Lagrangiano l para L pode-se destruir a coercividade, porque às componentes de U que tendem para infinito, podem estar associadas componentes de q nulas.

Exemplo 2.2.5. Dado o problema de Lagrange com $l(t, x, u) = u^2$ e $f(t, x, u) = u$ vem $L(t, x, q, U) = q_1(u_1)^2 + q_2(u_2)^2 + q_3(u_3)^2$ e $F(t, x, q, U) = q_1u_1 + q_2u_2 + q_3u_3$. Considere-se $q_1 = q_3 = 0$, $q_2 = 1$, $u_1 = k$ e $u_2 = u_3 = 0$. Nestas condições, l e f satisfazem as condições de coercividade e, no entanto, $L = 0$, $F = 0$ e $\|(q, U)\| = \|(0, 1, 0, k, 0, 0)\| \rightarrow \infty$ quando $k \rightarrow \infty$.

Seja $(x(t), u(t))$ um par admissível do problema inicial, e considere-se $p_1 = 1$, $p_2 = \dots = p_{n+2} = 0$, $U = (u, 0, \dots, 0)$. Neste caso vem $L(t, x, q, U) = l(t, x, u)$ e $F(t, x, q, U) = f(t, x, u)$.

Sendo assim, se S for a classe dos pares admissíveis do problema inicial e S^r a classe dos pares admissíveis relaxados $(x(t), p(t), U(t))$, então $S \subset S^r$, donde se conclui que as trajectórias do problema inicial, P^0 , estão contidas na classe mais rica das trajectórias do problema relaxado P^r . Nestas condições, se $j = \inf J^r[x, p, U]$ em S^r e $i = \inf J^0[x, u]$ em S , então $j \leq i$.

Sob algumas hipóteses $j = i$ e, sob as mesmas hipóteses, as trajectórias relaxadas podem ser uniformemente aproximadas pelas trajectórias do problema inicial.

Teorema 2.2.6. ([18]; p.517) *Considere-se*

- $((t, x(t)) \in A$ com A fechado;
- $u(t) \in B(t)$ com $B(t)$ fechado e independente de x ;
- $M = \{(t, x, u) : (t, x) \in A, u \in B(t)\}$ fechado;
- f contínua em M e localmente lipschitziana em relação a x ;
- $(y(t), p(t), U(t))$, $0 \leq t \leq T$ uma solução relaxada cuja trajectória y está no interior de A e cujas componentes de $U(t)$, $0 \leq t \leq T$ são limitadas.

Nestas condições, existe uma sucessão $(x^k(t), u^{(k)}(t))$, $0 \leq t \leq T$ de soluções usuais tais que $x^k(t) \rightarrow y(t)$ uniformemente em $[0, T]$ e $x^k(0) = y(0)$.

Pretende-se provar, através de técnicas de compactificação, o teorema seguinte.

Teorema 2.2.7. *Sejam l , f contínuas com l a satisfazer as hipóteses de coercividade (2.2.10)- (2.2.11). Nestas condições, o problema (2.2.7)- (2.2.9) possui minimizante relaxado.*

Para provar este teorema definem-se dois novos problemas à custa do problema relaxado, e usam-se alguns resultados e técnicas usadas por Guerra e Sarychev ([29]) os quais se apresentam no que se segue.

Como se sabe, o problema de existência no caso de controlos limitados pode ser resolvido através do Teorema de Filippov. A ideia seria completar o conjunto dos parâmetros de controlo por “pontos infinito”, chegando a um conjunto compacto.

2.3 Problema relaxado de tempo óptimo

Usando uma ideia introduzida por Gamkrelidze [28] prova-se que qualquer problema de Lagrange com $l > 0$ pode ser reduzido a um problema de tempo óptimo autónomo. Esta transformação, conjuntamente com uma compactificação, foi usada para provar resultados de existência de minimizantes de problemas variacionais clássicos com Lagrangianos convexos ([28]; Cap.8), e de regularidade lipschitziana dos minimizantes de problemas de Lagrange ([44]).

2.3.1 Mudança de variável

Considere-se o problema definido em (2.2.7)-(2.2.9) e uma nova variável tempo τ definida da seguinte forma

$$\tau(t) = \int_0^t l(s, x(s), u(s)) ds, \quad t \in [0, T]. \quad (2.3.17)$$

Obviamente que $\tau(T) = \bar{\tau}$ coincide com o valor do funcional $J^0[x, u]$ do problema original.

Como

$$\frac{d\tau}{dt}(t) = l(t, x(t), u(t)) > 0,$$

τ é uma função estritamente crescente e, da forma como foi definida, é absolutamente contínua. Nestas condições, τ admite função inversa, $t(\cdot)$, definida em $[0, \bar{\tau}]$. Assim,

$$\frac{dt}{d\tau}(\tau) = \frac{1}{l(t(\tau), x(t(\tau)), u(t(\tau)))}$$

e

$$\frac{dx}{d\tau}(\tau) = \frac{dx}{dt}(t(\tau)) \frac{dt}{d\tau}(\tau) = \frac{f(t(\tau), x(t(\tau)), u(t(\tau)))}{l(t(\tau), x(t(\tau)), u(t(\tau)))}.$$

Considerando τ como variável independente, $t(\tau)$ e $y(\tau) = x(t(\tau))$ como componentes das trajectórias e $v(\tau) = u(t(\tau))$ como controlo, transforma-se o problema original no seguinte problema de tempo óptimo

$$\bar{\tau} \longrightarrow \min$$

com o sistema dinâmico

$$\begin{aligned}\frac{dt}{d\tau}(\tau) &= \frac{1}{l(t(\tau), y(\tau), v(\tau))}, \\ \frac{dy}{d\tau}(\tau) &= \frac{f(t(\tau), y(\tau), v(\tau))}{l(t(\tau), y(\tau), u(\tau))},\end{aligned}$$

e as condições de fronteira

$$t(0) = 0, t(\bar{\tau}) = T, y(0) = x_0, y(\bar{\tau}) = x_1.$$

2.3.2 Redução do problema relaxado a um problema relaxado de tempo ótimo

Considera-se o problema P^r definido em (2.2.14)-(2.2.16) e uma mudança da variável do mesmo tipo que em (2.3.17), definida por

$$\tau(t) = \int_0^t L(s, x(s), q(s), U(s)) ds.$$

Como, $l \geq 1$ vem $L \geq 1$, o que permite concluir que τ é estritamente crescente. Procedendo de modo análogo ao da subsecção anterior, para $\tau \in [0, \bar{\tau}]$ considere-se

$$y(\tau) = x(t(\tau)), p(\tau) = q(t(\tau)), V(\tau) = U(t(\tau)).$$

Desta forma obtém-se o problema $P^{r,t}$

$$\bar{\tau} \longrightarrow \min, \tag{2.3.18}$$

com o sistema dinâmico

$$\frac{dt}{d\tau}(\tau) = \frac{1}{L(t(\tau), y(\tau), p(\tau), V(\tau))}, \text{ para q.t. } \tau \in [0, \bar{\tau}], \tag{2.3.19}$$

$$\frac{dy}{d\tau}(\tau) = \frac{F(t(\tau), y(\tau), p(\tau), V(\tau))}{L(t(\tau), y(\tau), p(\tau), V(\tau))}, \text{ para q.t. } \tau \in [0, \bar{\tau}] \tag{2.3.20}$$

e as condições de fronteira

$$t(0) = 0, t(\bar{\tau}) = T, y(0) = x_0, y(\bar{\tau}) = x_1. \tag{2.3.21}$$

Lema 2.3.1. *Qualquer solução óptima de (2.3.18)-(2.3.21) corresponde a uma solução óptima de (2.2.14)-(2.2.16).*

Demonstração Seja $(t(\tau), y(\tau), p(\tau), V(\tau))$ uma solução admissível do problema (2.3.18)-(2.3.21). Assim, $p(\cdot)$ e $V(\cdot)$ são mensuráveis, $(p(\cdot), V(\cdot)) \in \mathcal{U}$, as funções $t(\cdot)$ e $y(\cdot)$ são absolutamente contínuas e satisfazem (2.3.19)-(2.3.20).

Como o Lagrangiano $L \geq 1$, conclui-se que

$$0 < \frac{dt}{d\tau}(\tau) = \frac{1}{L(t(\tau), y(\tau), p(\tau), V(\tau))} \leq 1, \text{ para q.t. } \tau \in [0, \bar{\tau}],$$

o que permite concluir que $t(\tau)$ é uma função estritamente crescente e, consequentemente, invertível. Seja τ a função inversa de t , isto é, $t(\tau(t)) = t$, $t \in [0, T]$. Assim, considerando $x(t) = y(\tau(t))$, x satisfaz as condições de fronteira $x(0) = y(\tau(0)) = y(0) = x_0$ e $x(T) = y(\tau(T)) = y(\bar{\tau}) = x_1$, e o sistema dinâmico

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt}(t) &= \frac{dy}{d\tau}(\tau(t)) \frac{d\tau}{dt}(t) \\ &= \frac{F(t(\tau(t)), y(\tau(t)), p(\tau(t)), V(\tau(t)))}{L(t(\tau(t)), y(\tau(t)), p(\tau(t)), V(\tau(t)))} L(t(\tau(t)), y(\tau(t)), p(\tau(t)), V(\tau(t))) \\ &= F(t, x(t), q(t), U(t)). \end{aligned}$$

Além disso, como $t(\cdot)$ e $y(\cdot)$ são absolutamente contínuas, conclui-se que x é absolutamente contínua em $[0, T]$. Como τ é injectiva, a sua função inversa transforma conjuntos de medida nula em conjuntos de medida nula. Assim, $U(t) = V(\tau(t))$ e $q(t) = p(\tau(t))$ são funções mensuráveis em $[0, T]$.

Por outro lado, de (2.3.19) conclui-se que

$$\frac{d\tau}{dt}(t) = L(t, x(t), q(t), U(t))$$

e, consequentemente,

$$\tau(t) = \int_0^T L(t, x(s), q(s), U(s)) ds,$$

donde se conclui que

$$\bar{\tau} = \tau(T) = \int_0^t L(t, x(t), q(t), U(t)) dt = J^r[x, q, U].$$

■

Para o problema relaxado de tempo óptimo, $P^{r,t}$, t e y são as componentes da trajectória e p e V as componentes do controlo. No que segue designa-se por z o par (t, y) , ficando o sistema dinâmico (2.3.19)-(2.3.20) da forma

$$\frac{dz}{d\tau}(\tau) = \left(\frac{1}{L(z(\tau), p(\tau), V(\tau))}, \frac{F(z(\tau), p(\tau), V(\tau))}{L(z(\tau), p(\tau), V(\tau))} \right), \text{ para q.t. } \tau \in [0, \bar{\tau}].$$

Como já foi referido, o conjunto dos controlos $\mathcal{U} = \Sigma^{n+1} \times \mathbb{R}^{r(n+2)}$ não é compacto. No que se segue considera-se uma compactificação deste conjunto e o problema relaxado de tempo óptimo que lhe corresponde, o qual se designa por problema compactificado. Apresenta-se em primeiro lugar a compactificação que vai ser usada.

2.4 Problema compactificado

Considere-se $z = (t, y) \in A$, com $A \subset \mathbb{R}^{n+1}$ um compacto, e a função vectorial definida em $A \times \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ através da expressão

$$\left(\frac{1}{L(z, p, V)}, \frac{F(z, p, V)}{L(z, p, V)} \right). \quad (2.4.22)$$

Por vezes, por facilidade de escrita, usa-se \hat{F} e \hat{f} em vez de $(1, F)$ e $(1, f)$, respectivamente. Nestas situações, a função definida anteriormente fica da forma $\left(\frac{\hat{F}(z, p, V)}{L(z, p, V)} \right)$.

Lema 2.4.1. *Sejam L e F as funções definidas em (2.2.12) e (2.2.13), respectivamente. Nestas condições,*

$$\frac{\|\hat{F}(z, p, V)\|}{L(z, p, V)} \leq \sum_{i=1}^{n+2} \frac{\|\hat{f}(z, v^i)\|}{l(z, v^i)}.$$

Demonstração Da definição de L e F resulta

$$\begin{aligned}
\frac{\|\widehat{F}(z, p, V)\|}{L(z, p, V)} &= \frac{\left\| \sum_{i=1}^{n+2} p_i \widehat{f}(z, v^i) \right\|}{\sum_{j=1}^{n+2} p_j l(z, v^j)} \\
&\leq \frac{\sum_{i=1}^{n+2} p_i \|\widehat{f}(z, v^i)\|}{\sum_{j=1}^{n+2} p_j l(z, v^j)} \\
&\leq \sum_{i=1, \dots, n+2: p_i \neq 0} \frac{p_i \|\widehat{f}(z, v^i)\|}{p_i l(z, v^i)} \\
&\leq \sum_{i=1}^{n+2} \frac{\|\widehat{f}(z, v^i)\|}{l(z, v^i)}.
\end{aligned}$$

■

Lema 2.4.2. *A função definida em (2.4.22) é contínua e limitada.*

Demonstração Uma vez que as funções l e f são contínuas, L e F definidas em (2.2.12) e (2.2.13), respectivamente, também são funções contínuas. Do facto de $l \geq 1$ vem $L \geq 1$ e, desta forma, resulta a continuidade das funções $\frac{1}{L(z, p, V)}$ e $\frac{F(z, p, V)}{L(z, p, V)}$.

Resta provar que as funções $\frac{1}{L(z, p, V)}$ e $\frac{F(z, p, V)}{L(z, p, V)}$ são limitadas. Usando o Lema 2.4.1, basta verificar o que se passa com $\frac{\|\widehat{f}(z, v^i)\|}{l(z, v^i)}$ quando $\|v^i\| \rightarrow \infty$.

De (2.2.11) conclui-se que

$$\frac{1}{l(z, v^i)} \rightarrow 0, \text{ quando } \|v^i\| \rightarrow \infty.$$

Por outro lado, se existe uma constante positiva K tal que $\|f(z, v^i)\| < K$ quando $\|v^i\| \rightarrow \infty$, de (2.2.11) conclui-se que

$$\frac{\|f(z, v^i)\|}{l(z, v^i)} \rightarrow 0.$$

Se para $\|v^i\| \rightarrow \infty$ vem $\|f(z, v^i)\| \rightarrow \infty$, de (2.2.10) resulta

$$\frac{\|f(z, v^i)\|}{l(z, v^i)} \leq \frac{\|f(z, v^i)\|}{\phi(\|f(z, v^i)\|)} \rightarrow 0.$$

Assim,

$$\frac{\|\widehat{f}(z, v^i)\|}{l(z, v^i)} \rightarrow 0, \text{ quando } \|v^i\| \rightarrow \infty, \quad (2.4.23)$$

uniformemente em relação a $z \in A$. ■

Do Lema 2.4.2 conclui-se que dado $z \in A$ fixo, a função vectorial $E_z : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ definida por

$$E_z(p, V) = \left(\frac{\widehat{F}(z, p, V)}{L(z, p, V)} \right) \quad (2.4.24)$$

transforma \mathcal{U} num conjunto limitado de \mathbb{R}^{n+1} .

2.4.1 Compactificação de Loeb

Usando as funções E_z definidas em (2.4.24), define-se uma compactificação do conjunto \mathcal{U} .

Recorde-se que $\mathcal{U} = \Sigma^{n+1} \times \mathbb{R}^{(n+2)r}$. Como o simplex Σ^{n+1} é compacto, poder-se-ia pensar na compactificação de Alexandroff de \mathbb{R}^{n+2} . Contudo, com tal compactificação poderia não ser possível obter extensões contínuas das funções E_z .

Por outro lado, a compactificação de Stone-Cech é a “maior” compactificação na qual, para qualquer função contínua e limitada, é possível obter uma extensão contínua. Contudo, com esta compactificação não se obtém um espaço sequencialmente compacto ([23];p.368), propriedade que será útil no que se segue.

Considere-se $z \in A$ fixo e uma sucessão $(p^j, V^{(j)})_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{U}$ tal que $(V^{(j)})_{j \in \mathbb{N}}$ é ilimitada. Assim, existe pelo menos um índice $i \in \{1, 2, \dots, n+2\}$ tal que $\|v^{i(j)}\| \rightarrow +\infty$. Se a componente de p^j , p_i^j , que lhe corresponde tende para zero pode não existir o limite $p_i^j l(z, v^{i(j)})$ (indeterminação do tipo $0 \times \infty$) e, conseqüentemente, não existir o $\lim_{j \rightarrow +\infty} L(z, p^j, V^{(j)})$.

Para se obter extensões contínuas de E_z usa-se a compactificação de Loeb apresentada em [34]. Esta compactificação é a “menor” compactificação onde as componentes da função E_z têm extensões contínuas, obtendo-se E_z^e quando se passa de \mathcal{U} para a compactificação de \mathcal{U} .

Para cada $z \in A$ define-se a compactificação de \mathcal{U} da seguinte forma

$$C\mathcal{U} = \mathcal{U} \cup \Delta, \quad (2.4.25)$$

onde

$$\Delta = \bigcap_{K \subset \mathcal{U}, K \text{ compacto}} \overline{E_z(\mathcal{U} \setminus K)}. \quad (2.4.26)$$

Para ω a pertencer a Δ , O um aberto de \mathbb{R}^{n+1} que contém ω e K um compacto de \mathcal{U} , considera-se o conjunto

$$N_{O,K}(\omega) = (O \cap \Delta) \cup (E_z^{-1}(O) \setminus K). \quad (2.4.27)$$

Lema 2.4.3. *Seja τ a topologia gerada pela base formada pelos abertos de \mathcal{U} e pelos conjuntos $N_{O,K}(\omega)$ definidos em (2.4.27). Nestas condições, $(C\mathcal{U}, \tau)$ é uma compactificação de \mathcal{U} .*

Demonstração Pretende-se demonstrar que $\overline{\mathcal{U}} = C\mathcal{U}$.

Como $\mathcal{U} \subset C\mathcal{U}$ vem $\overline{\mathcal{U}} \subset C\mathcal{U}$. Para demonstrar a inclusão contrária considere-se $x \in C\mathcal{U} = \mathcal{U} \cup \Delta$.

Se $x \in \mathcal{U}$ então $x \in \overline{\mathcal{U}}$. No caso de $x \in \Delta$ prova-se que qualquer vizinhança $N_{O,K}(x)$ de x contém pontos de \mathcal{U} , onde $N_{O,K}(x) = (O \cap \Delta) \cup (E_z^{-1}(O) \setminus K)$ com O um aberto em \mathbb{R}^{n+1} que contém x .

De facto, dado $x \in \Delta$ então $x \in \overline{E_z(\mathcal{U} \setminus K)}$ para qualquer compacto $K \subset \mathcal{U}$ e, por conseguinte, existe uma sucessão $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset E_z(\mathcal{U} \setminus K)$ tal que $x_n \rightarrow x$ em \mathbb{R}^{n+1} . Assim, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $y_n \in \mathcal{U} \setminus K$ tal que $x_n = E_z(y_n)$. Nestas condições, dado um

aberto O de \mathbb{R}^{n+1} tal que $x \in O$, existe uma ordem n_0 a partir da qual $E_z(y_n) \in O$ ou $y_n \in E_z^{-1}(O)$. Como $y_n \in \mathcal{U} \setminus K$, conclui-se que para $n \geq n_0$, $y_n \in E_z^{-1}(O) \cap \mathcal{U} \setminus K \neq \emptyset$ e, consequentemente, $(O \cap \Delta) \cup (E_z^{-1}(O) \setminus K) \cap \mathcal{U} \neq \emptyset$ ou, de (2.4.27)

$$N_{O,K}(x) \cap \mathcal{U} \neq \emptyset,$$

o que permite concluir que $x \in \overline{\mathcal{U}}$. ■

Definição 2.4.4. Diz-se que um espaço topológico satisfaz o 1^o Axioma da enumerabilidade se cada ponto possui uma base enumerável de vizinhanças.

Lema 2.4.5. *O espaço $(C\mathcal{U}, \tau)$ verifica o 1^o Axioma da enumerabilidade.*

Demonstração Para $x \in \mathcal{U}$, considere-se o conjunto

$$\mathcal{B}(x) = \{B(x, \rho) \cap \mathcal{U}, \rho \in \mathbb{Q}\}, \quad (2.4.28)$$

onde $B(x, \rho)$ é a bola de centro x e raio racional ρ em $\mathbb{R}^{(n+2)(r+1)}$.

No caso de $x \in \Delta$ seja

$$\mathcal{B}(x) = \{(B'(x, \rho) \cap \Delta) \cup (E_z^{-1}(B'(x, \rho)) \setminus K_m), \rho \in \mathbb{Q}, m \in \mathbb{N}\}, \quad (2.4.29)$$

com $K_m = \{x \in \mathcal{U} : \|x\| \leq m\}$ e $B'(x, \rho)$ a bola de centro x e raio racional ρ em $\mathbb{R}^{(n+1)}$.

Para $x \in \mathcal{U}$, $\mathcal{B}(x)$ definido em (2.4.28) constitui uma base enumerável de vizinhanças de x uma vez que, dado um aberto O tal que $x \in O$, existe $\rho \in \mathbb{Q}$ tal que $B_x = (B(x, \rho) \cap \mathcal{U}) \subset O$.

No caso de $x \in \Delta$, dado um aberto O que contém x existe $\rho \in \mathbb{Q}$ tal que

$$B'(x, \rho) \subset O. \quad (2.4.30)$$

Por outro lado, dado $K \subset \mathcal{U}$ compacto, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$K \subset K_m = \overline{B}(0, m) \cap \mathcal{U}. \quad (2.4.31)$$

Considere-se

$$B_x = (B'(x, \rho) \cap \Delta) \cup (E_z^{-1}(B'(x, \rho)) \setminus K_m).$$

Atendendo a (2.4.30)-(2.4.31) conclui-se que existem $\rho \in \mathbb{Q}$ e $m \in \mathbb{N}$ tais que

$$B_x \subset (O \cap \Delta) \cup (E_z^{-1}(O) \setminus K),$$

o que permite concluir que $\mathcal{B}(x)$ definido em (2.4.29) constitui uma base enumerável de vizinhanças de x . ■

Teorema 2.4.6. ([23]; p.78) *Sejam (X, τ) um espaço topológico que verifica o 1º Axioma da enumerabilidade, $A \subset X$ e $x \in \bar{A}$. Então, existe $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A$ tal que x_n converge para x .*

Do Teorema 3.10.31 de ([23]; p.266) resulta o teorema seguinte.

Teorema 2.4.7. *Seja (X, τ) um espaço topológico que verifica o 1º Axioma da enumerabilidade. Se $A \subset X$ é compacto então A é sequencialmente compacto.*

Usando o Lema 2.4.5 e os Teoremas 2.4.7 e 2.4.6 conclui-se o resultado seguinte.

Teorema 2.4.8. *Seja $A \subset C\mathcal{U}$. Verificam-se as seguintes condições:*

- i. *Se A é compacto, então A é sequencialmente compacto;*
- ii. *Se $x \in \bar{A}$ então existe $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A$ tal que x_n converge para x .*

Para cada $z \in A$ define-se a extensão contínua E_z^e em $C\mathcal{U}$ da seguinte forma:

$$E_z^e(w) = \begin{cases} E_z(w) & \text{se } w = (p, V) \in \mathcal{U} \\ w & \text{se } w \in \Delta \end{cases}. \quad (2.4.32)$$

2.4.2 Convexidade de $E_z^e(C\mathcal{U})$

Prova-se em primeiro lugar que, para cada $z \in A$ e $\tau \in [0, \bar{\tau}]$, os conjuntos $P(\tau, z) = E_z(\mathcal{U})$ são convexos.

Lema 2.4.9. *Para cada $z \in A$ considera-se a função E_z definida em (2.4.22). Nestas condições o conjunto $P(\tau, z) = E_z(\mathcal{U})$ é convexo.*

Demonstração Pretende-se provar que para cada $z \in A$ e $\tau \in [0, \bar{\tau}]$ o conjunto

$$P(\tau, z) = \left\{ \left(\frac{1}{L(z(\tau), p(\tau), V(\tau))}, \frac{F(z(\tau), p(\tau), V(\tau))}{L(z(\tau), p(\tau), V(\tau))} \right), (p, V) \in \mathcal{U} \right\}$$

é convexo.

Seja $z \in A$ fixo. Da forma como L e F foram construídas em (2.2.12) e (2.2.13), respectivamente, conclui-se que os conjuntos $L(z, \mathcal{U})$ e $F(z, \mathcal{U})$ são convexos.

Sejam $E_z((\bar{p}, \bar{V}))$, $E_z((\bar{\bar{p}}, \bar{\bar{V}})) \in P(\tau, z)$.

Como $F(z, \mathcal{U})$ e $L(z, \mathcal{U})$ são convexos então, para todo o $\beta \in [0, 1]$, existe $(\tilde{p}, \tilde{V}) \in \mathcal{U}$ tal que

$$\beta(L(z, \bar{p}, \bar{V}), F(z, \bar{p}, \bar{V})) + (1 - \beta)(L(z, \bar{\bar{p}}, \bar{\bar{V}}), F(z, \bar{\bar{p}}, \bar{\bar{V}})) = (L(z, \tilde{p}, \tilde{V}), F(z, \tilde{p}, \tilde{V})). \quad (2.4.33)$$

Considere-se

$$\rho = \frac{\alpha}{L(z, \bar{p}, \bar{V})} + \frac{1 - \alpha}{L(z, \bar{\bar{p}}, \bar{\bar{V}})} \text{ e } \beta = \frac{\frac{\alpha}{L(z, \bar{p}, \bar{V})}}{\rho}. \quad (2.4.34)$$

De (2.4.33) e (2.4.34) vem

$$\frac{\alpha}{\rho} \left(1, \frac{F(z, \bar{p}, \bar{V})}{L(z, \bar{p}, \bar{V})} \right) + \frac{1 - \alpha}{\rho} \left(1, \frac{F(z, \bar{\bar{p}}, \bar{\bar{V}})}{L(z, \bar{\bar{p}}, \bar{\bar{V}})} \right) = (L(z, \tilde{p}, \tilde{V}), F(z, \tilde{p}, \tilde{V})),$$

donde se conclui que

$$\rho = \frac{1}{L(z, \tilde{p}, \tilde{V})} \text{ e } \alpha \frac{F(z, \bar{p}, \bar{V})}{L(z, \bar{p}, \bar{V})} + (1 - \alpha) \frac{F(z, \bar{\bar{p}}, \bar{\bar{V}})}{L(z, \bar{\bar{p}}, \bar{\bar{V}})} = \rho F(z, \tilde{p}, \tilde{V}). \quad (2.4.35)$$

De (2.4.34) e (2.4.35) resulta

$$\frac{\alpha}{L(z, \bar{p}, \bar{V})} + \frac{1 - \alpha}{L(z, \bar{\bar{p}}, \bar{\bar{V}})} = \frac{1}{L(z, \tilde{p}, \tilde{V})}$$

e

$$\alpha \frac{F(z, \bar{p}, \bar{V})}{L(z, \bar{p}, \bar{V})} + (1 - \alpha) \frac{F(z, \bar{\bar{p}}, \bar{\bar{V}})}{L(z, \bar{\bar{p}}, \bar{\bar{V}})} = \frac{F(z, \tilde{p}, \tilde{V})}{L(z, \tilde{p}, \tilde{V})},$$

o que permite concluir que, dado $\alpha \in [0, 1]$, existe $(p, V) = (\tilde{p}, \tilde{V})$ tal que

$$\alpha E_z((\bar{p}, \bar{V})) + (1 - \alpha) E_z((\bar{\bar{p}}, \bar{\bar{V}})) = E_z(p, V)$$

e, por conseguinte, $P(\tau, z)$ é convexo. ■

Dado $z \in A$ fixo, da definição da compactificação \mathcal{CU} e da definição de E_z^e conclui-se que

$$E_z^e(\mathcal{CU}) = E_z(\mathcal{U}) \cup \Delta.$$

Provou-se anteriormente que para cada $z \in A$ o conjunto $E_z(\mathcal{U})$ é convexo. No que se segue prova-se que o mesmo acontece com $E_z^e(\mathcal{CU})$. Para tal usam-se os resultados seguintes:

Teorema 2.4.10. ([23]; p. 168) *Se $f : X \rightarrow Y$ é uma aplicação contínua de um espaço de compacto X para um espaço Hausdorff Y , então $\overline{f(C)} = f(\overline{C})$ para todo o subconjunto $C \subset X$.*

Teorema 2.4.11. ([41]; p.45) *Seja $C \subset \mathbb{R}^m$ um conjunto convexo. Então \overline{C} é convexo em \mathbb{R}^m .*

Lema 2.4.12. *Dado $z \in A$, considere-se a função E_z^e definida em (2.4.32). O conjunto $E_z^e(\mathcal{CU})$ é convexo.*

Demonstração Seja $z \in A$. Do Lema 2.4.3 resulta que $\overline{\mathcal{U}} = \mathcal{CU}$ e, consequentemente,

$$E_z^e(\overline{\mathcal{U}}) = E_z^e(\mathcal{CU}). \quad (2.4.36)$$

Do Teorema 2.4.10, com $Y = \mathbb{R}^{n+1}$ e $X = \mathcal{CU}$, e de (2.4.36) resulta

$$\overline{E_z^e(\mathcal{U})} = E_z^e(\mathcal{CU}). \quad (2.4.37)$$

Da definição de E_z^e conclui-se que

$$\overline{E_z(\mathcal{U})} = E_z^e(C\mathcal{U}). \quad (2.4.38)$$

Uma vez que $E_z(\mathcal{U})$ é convexo e $E_z(\mathcal{U}) \subset \mathbb{R}^{n+1}$, o Teorema 2.4.11 permite concluir que $\overline{E_z(\mathcal{U})}$ é convexo. Sendo assim, de (2.4.38) resulta que $E_z^e(C\mathcal{U})$ é convexo. ■

Usando no problema relaxado de tempo ótimo, $P^{r,t}$, o conjunto dos controlos $C\mathcal{U}$, de (2.3.18)- (2.3.21) resulta o problema compactificado, $P^{r,t,c}$, definido da seguinte forma

$$\bar{\tau} \longrightarrow \min, \quad (2.4.39)$$

com o sistema dinâmico

$$\frac{dz}{d\tau}(\tau) = E_z^e(\nu(\tau)), \quad \text{para q.t. } \tau \in [0, \bar{\tau}] \quad (2.4.40)$$

e as condições de fronteira

$$z(0) = (0, x_0), \quad z(\bar{\tau}) = (T, x_1), \quad (2.4.41)$$

com $\nu \in C\mathcal{U}$.

2.5 Existência de minimizante relaxado

Suponhamos que $(\tilde{z}(\tau), \tilde{\nu}(\tau)) = (\tilde{t}(\tau), \tilde{y}(\tau), \tilde{\nu}(\tau)) \in A \times C\mathcal{U}$ é uma solução admissível à qual corresponde o valor $\bar{\tau}$.

No caso de $(\tilde{t}(\tau), \tilde{y}(\tau), \tilde{\nu}(\tau)) \in A \times \mathcal{U}$ para q.t. $\tau \in [0, \bar{\tau}]$, vem $\tilde{\nu}(\tau) = (\tilde{p}(\tau), \tilde{V}(\tau))$ e, usando o Lema 2.3.1, conclui-se que $(\tilde{x}(t), \tilde{q}(t), \tilde{U}(t)) = (\tilde{y}(\tau(t)), \tilde{p}(\tau(t)), \tilde{V}(\tau(t)))$ é uma solução admissível do problema relaxado e o valor do funcional $J^r[\tilde{x}, \tilde{q}, \tilde{U}]$ coincide com $\bar{\tau}$.

Se $\tilde{\nu}(\tau) \in C\mathcal{U} \setminus \mathcal{U}$ para $\tau \in \Upsilon$ com $\Upsilon \subset [0, \bar{\tau}]$ e $|\Upsilon| > 0$, então $\tilde{\nu}(\tau) \in \Delta$. Usando (2.4.26) conclui-se que $\tilde{\nu}(\tau) \in \overline{E_z(\mathcal{U} \setminus K)}$, com $K \subset \mathcal{U}$ um compacto qualquer. Nestas condições,

existe $(p^j(\tau), V^{(j)}(\tau))_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{U} \setminus K$ tal que

$$\tilde{v}(\tau) = \lim_{j \rightarrow \infty} E_{\tilde{z}}(p^j(\tau), V^{(j)}(\tau)), \quad (2.5.42)$$

para $\tau \in \Upsilon$.

Relembre-se que para cada $\tau \in \Upsilon$ e $j \in \mathbb{N}$, $p^j(\tau) = (p_1^j(\tau), \dots, p_{n+2}^j(\tau)) \in \Sigma^{n+1}$ e $V^{(j)}(\tau) = (v^{1(j)}(\tau), \dots, v^{n+2(j)}(\tau)) = (u_1^{1(j)}(\tau), \dots, u_r^{n+2(j)}(\tau)) \in \mathbb{R}^{(n+2)r}$. Se, para cada $\tau \in \Upsilon$ vem $(p^j(\tau), V^{(j)}(\tau))_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{U} \setminus K$, então existe $i \in I = \{1, 2, \dots, n+2\}$ tal que $\lim_{j \rightarrow \infty} \|v^{i(j)}(\tau)\| = \infty$ ou uma sua subsucessão que, no que se segue, se designa pela mesma notação. Por outro lado, para cada $i \in I$ e $\tau \in \Upsilon$, considere-se $p_i^j(\tau) \rightarrow \tilde{p}_i(\tau) \in \Sigma^{n+1}$. Sejam I^+ , I^0 e I^∞ subconjuntos de I tais que

$$i \in I^+ \Leftrightarrow \tilde{p}_i > 0, \quad i \in I^0 \Leftrightarrow \tilde{p}_i = 0 \quad \text{e} \quad i \in I^\infty \Leftrightarrow \|v^{i(j)}\| \rightarrow \infty.$$

Lema 2.5.1. *Seja $(p^j(\tau), V^{(j)}(\tau))_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{U} \setminus K$ uma sucessão que verifica (2.5.42) com $\tau \in \Upsilon$ e $K \subset \mathcal{U}$ um compacto. Se $I^0 \neq \emptyset$, então*

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i \in I^0} p_i^j(\tau) \hat{f}(\tilde{z}(\tau), v^{i(j)}(\tau))}{\sum_{s=1}^{n+2} p_s^j(\tau) l(\tilde{z}(\tau), v^{s(j)}(\tau))} = (0, \mathbf{0}), \quad (2.5.43)$$

para $\tau \in \Upsilon$.

Demonstração Seja $\tau \in \Upsilon$. Dado $i \in I^0$ vem $\lim_{j \rightarrow \infty} p_i^j(\tau) = 0$. Note-se que no 1º membro de (2.5.43) basta considerar $p_i^j(\tau) \neq 0$, visto que as parcelas correspondentes a $p_i^j(\tau) = 0$ são nulas, não há problema com o limite. Sendo assim, dado $\varepsilon > 0$ existe uma ordem N_ε tal que $0 < p_i^j(\tau) \leq \varepsilon^2$, para $j > N_\varepsilon$. Para estes valores de j ocorre uma das situações, $\|\hat{f}(\tilde{z}(\tau), v^{i(j)}(\tau))\| \leq \varepsilon^{-1}$ ou $\|\hat{f}(\tilde{z}(\tau), v^{i(j)}(\tau))\| > \varepsilon^{-1}$.

Considere-se que $\|\hat{f}(\tilde{z}(\tau), v^{i(j)}(\tau))\| \leq \varepsilon^{-1}$ para $j > N_\varepsilon$. Uma vez que $\sum_{s=1}^{n+2} p_s^j l(\tilde{z}(\tau), v^{s(j)}(\tau)) \geq 1$ vem

$$\frac{p_i^j(\tau) \|\hat{f}(\tilde{z}(\tau), v^{i(j)}(\tau))\|}{\sum_{s=1}^{n+2} p_s^j(\tau) l(\tilde{z}(\tau), v^{s(j)}(\tau))} \leq \varepsilon^2 \frac{\|\hat{f}(\tilde{z}(\tau), v^{i(j)}(\tau))\|}{\sum_{s=1}^{n+2} p_s^j l(\tilde{z}(\tau), v^{s(j)}(\tau))} \leq \varepsilon,$$

o que permite concluir que, quando $j \rightarrow \infty$,

$$\frac{p_i^j(\tau) \|\widehat{f}(\widetilde{z}(\tau), v^{i(j)}(\tau))\|}{\sum_{s=1}^{n+2} p_s^j(\tau) l(\widetilde{z}(\tau), v^{s(j)}(\tau))} \rightarrow 0. \quad (2.5.44)$$

No caso de se verificar $\|\widehat{f}(\widetilde{z}(\tau), v^{i(j)}(\tau))\| > \varepsilon^{-1}$ para $j > N_\varepsilon$ vem

$$\frac{p_i^j(\tau) \|\widehat{f}(\widetilde{z}(\tau), v^{i(j)}(\tau))\|}{\sum_{s=1}^{n+2} p_s^j(\tau) l(\widetilde{z}(\tau), v^{s(j)}(\tau))} \leq \frac{p_i^j(\tau) \|\widehat{f}(\widetilde{z}(\tau), v^{i(j)}(\tau))\|}{p_i^j(\tau) l(\widetilde{z}(\tau), v^{i(j)}(\tau))} \leq \frac{\|\widehat{f}(\widetilde{z}(\tau), v^{i(j)}(\tau))\|}{l(\widetilde{z}(\tau), v^{i(j)}(\tau))}. \quad (2.5.45)$$

De (2.2.11) conclui-se que para $i \in I^\infty$

$$\frac{1}{l(\widetilde{z}(\tau), v^{i(j)}(\tau))} \rightarrow 0, \text{ quando } j \rightarrow \infty. \quad (2.5.46)$$

Por outro lado, como $\widehat{f} = (1, f)$, vem $\|f(\widetilde{z}(\tau), v^{i(j)}(\tau))\| \rightarrow \infty$ quando $j \rightarrow \infty$ e de (2.2.10) resulta

$$\frac{\|f(\widetilde{z}(\tau), v^{i(j)}(\tau))\|}{l(\widetilde{z}(\tau), v^{i(j)}(\tau))} \leq \frac{\|f(\widetilde{z}(\tau), v^{i(j)}(\tau))\|}{\phi(\|\widehat{f}(\widetilde{z}(\tau), v^{i(j)}(\tau))\|)} \quad (2.5.47)$$

e

$$\frac{\|f(\widetilde{z}(\tau), v^{i(j)}(\tau))\|}{\phi(\|\widehat{f}(\widetilde{z}(\tau), v^{i(j)}(\tau))\|)} \rightarrow 0, \quad (2.5.48)$$

quando $j \rightarrow \infty$.

De (2.5.45)-(2.5.48) conclui-se que no caso de $\|\widehat{f}(\widetilde{z}(\tau), v^{i(j)}(\tau))\| > \varepsilon^{-1}$ também se verifica

$$\frac{p_i^j(\tau) \|\widehat{f}(\widetilde{z}(\tau), v^{i(j)}(\tau))\|}{\sum_{s=1}^{n+2} p_s^j(\tau) l(\widetilde{z}(\tau), v^{s(j)}(\tau))} \rightarrow 0 \quad (2.5.49)$$

quando $j \rightarrow \infty$.

Assim, de (2.5.49) e (2.5.44) resulta

$$\frac{\sum_{i \in I^0} p_i^j(\tau) \widehat{f}(\widetilde{z}(\tau), v^{i(j)}(\tau))}{\sum_{s=1}^{n+2} p_s^j(\tau) l(\widetilde{z}(\tau), v^{s(j)}(\tau))} \rightarrow (0, \mathbf{0}).$$

■

Lema 2.5.2. *Seja $(p^j(\tau), V^{(j)}(\tau))_{j \in \mathbb{N}}$ uma sucessão nas condições do Lema 2.5.1 para a qual $I^+ \cap I^\infty \neq \emptyset$. Então,*

$$\lim_{j \rightarrow \infty} E_{\tilde{z}}(p^j(\tau), V^{(j)}(\tau)) = (0, \mathbf{0})$$

para $\tau \in \Upsilon$.

Demonstração Da definição da função E_z resulta que

$$\begin{aligned} E_{\tilde{z}}(p^j(\tau), V^{(j)}(\tau)) &= \frac{\widehat{F}(\tilde{z}(\tau), p^j(\tau), V^{(j)}(\tau))}{L(\tilde{z}(\tau), p^j(\tau), V^{(j)}(\tau))} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^{n+2} p_i^j(\tau) \widehat{f}(\tilde{z}(\tau), v^{i(j)}(\tau))}{\sum_{s=1}^{n+2} p_s^j(\tau) l(\tilde{z}(\tau), v^{s(j)}(\tau))} \\ &= \frac{\sum_{i \in I^+} p_i^j(\tau) \widehat{f}(\tilde{z}(\tau), v^{i(j)}(\tau))}{\sum_{s=1}^{n+2} p_s^j(\tau) l(\tilde{z}(\tau), v^{s(j)}(\tau))} + \frac{\sum_{i \in I^0} p_i^j(\tau) \widehat{f}(\tilde{z}(\tau), v^{i(j)}(\tau))}{\sum_{s=1}^{n+2} p_s^j(\tau) l(\tilde{z}(\tau), v^{s(j)}(\tau))} \end{aligned} \quad (2.5.50)$$

para cada $j \in \mathbb{N}$.

Dado $i \in I^+ \cap I^\infty$ considere-se $k \in I^+$. Nestas condições, para cada $j \in \mathbb{N}$

$$\frac{p_k^j \|\widehat{f}(\tilde{z}, v^{k(j)})\|}{\sum_{i \in I^+} p_i^j l(\tilde{z}, v^{i(j)}) + \sum_{i \in I^0} p_i^j l(\tilde{z}, v^{i(j)})} < \frac{p_k^j \|\widehat{f}(\tilde{z}, v^{k(j)})\|}{p_i^j l(\tilde{z}, v^{i(j)}) + \sum_{i \in I^0} p_i^j l(\tilde{z}, v^{i(j)})}$$

e, por conseguinte,

$$\frac{p_k^j \|\widehat{f}(\tilde{z}, v^{k(j)})\|}{\sum_{i \in I^+} p_i^j l(\tilde{z}, v^{i(j)}) + \sum_{i \in I^0} p_i^j l(\tilde{z}, v^{i(j)})} \leq \min \left\{ \frac{\|\widehat{f}(\tilde{z}, v^{k(j)})\|}{p_i^j l(\tilde{z}, v^{i(j)})}, \frac{\|\widehat{f}(\tilde{z}, v^{k(j)})\|}{l(\tilde{z}, v^{k(j)})}, i \in I^+ \cap I^\infty \right\}. \quad (2.5.51)$$

Como $p_i^j(\tau) \rightarrow \tilde{p}_i(\tau)$, dado $\varepsilon > 0$ existe uma ordem N_ε tal que $p_i^j(\tau) \geq \frac{\tilde{p}_i}{2}(\tau)$ para $j > N_\varepsilon$, o que permite concluir que para esses valores de j

$$\frac{\|\widehat{f}(\tilde{z}(\tau), v^{k(j)}(\tau))\|}{p_i^j(\tau) l(\tilde{z}(\tau), v^{i(j)}(\tau))} \leq \frac{2 \|\widehat{f}(\tilde{z}(\tau), v^{k(j)}(\tau))\|}{\tilde{p}_i(\tau) l(\tilde{z}(\tau), v^{i(j)}(\tau))}.$$

Tendo em atenção esta desigualdade em (2.5.51) conclui-se que

$$\frac{p_k^j \|\widehat{f}(\widetilde{z}, v^{k(j)})\|}{\sum_{i \in I^+} p_i^j l(\widetilde{z}, v^{i(j)}) + \sum_{i \in I^0} p_i^j l(\widetilde{z}, v^{i(j)})} \leq \min \left\{ \frac{2\|\widehat{f}(\widetilde{z}, v^{k(j)})\|}{\widetilde{p}_i l(\widetilde{z}, v^{i(j)})}, \frac{\|\widehat{f}(\widetilde{z}, v^{k(j)})\|}{l(\widetilde{z}, v^{k(j)})}, i \in I^+ \cap I^\infty \right\}, \quad (2.5.52)$$

para $j > N_\varepsilon$. Para se concluir o que se pretende basta provar que uma das fracções do 2º membro de (2.5.52) tende para zero quando $j \rightarrow \infty$.

Tal como no Lema 2.5.1 consideram-se dois casos, consoante $\|\widehat{f}(\widetilde{z}(\tau), v^{k(j)}(\tau))\| \leq \varepsilon^{-1}$ ou $\|\widehat{f}(\widetilde{z}(\tau), v^{k(j)}(\tau))\| > \varepsilon^{-1}$.

Considere-se o caso em que $\|\widehat{f}(\widetilde{z}(\tau), v^{k(j)}(\tau))\| \leq \varepsilon^{-1}$.

Dado $i \in I^+ \cap I^\infty$, da hipótese de coercividade (2.2.11) resulta $\widetilde{p}_i(\tau) l(\widetilde{z}(\tau), v^{i(j)}(\tau)) \rightarrow +\infty$. Assim, para todo o $\varepsilon > 0$ existe N'_ε tal que para todo $j \geq N'_\varepsilon$ vem $\widetilde{p}_i(\tau) l(\widetilde{z}(\tau), v^{i(j)}(\tau)) \geq \varepsilon^{-2}$ e, consequentemente,

$$\frac{2\|\widehat{f}(\widetilde{z}(\tau), v^{k(j)}(\tau))\|}{\widetilde{p}_i(\tau) l(\widetilde{z}(\tau), v^{i(j)}(\tau))} \leq 2\varepsilon, \quad (2.5.53)$$

para j suficientemente grande.

No caso de $\|\widehat{f}(\widetilde{z}(\tau), v^{k(j)}(\tau))\| > \varepsilon^{-1}$, prova-se de modo análogo a (2.5.46)-(2.5.48) que

$$\frac{\|\widehat{f}(\widetilde{z}(\tau), v^{k(j)}(\tau))\|}{l(\widetilde{z}(\tau), v^{k(j)}(\tau))} \rightarrow 0. \quad (2.5.54)$$

Assim, de (2.5.52)-(2.5.54) vem

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{p_k^j(\tau) \|\widehat{f}(\widetilde{z}(\tau), v^{k(j)}(\tau))\|}{\sum_{i \in I^+} p_i^j(\tau) l(\widetilde{z}(\tau), v^{i(j)}(\tau)) + \sum_{i \in I^0} p_i^j(\tau) l(\widetilde{z}(\tau), v^{i(j)}(\tau))} = 0$$

para $i \in I^+ \cap I^\infty$ e $k \in I^+$ e, consequentemente,

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i \in I^+} p_i^j(\tau) \widehat{f}(\widetilde{z}(\tau), v^{i(j)}(\tau))}{\sum_{s=1}^{n+2} p_s^j(\tau) l(\widetilde{z}(\tau), v^{s(j)}(\tau))} = (0, \mathbf{0}). \quad (2.5.55)$$

De (2.5.50), (2.5.55) e do Lema 2.5.1 vem

$$\lim_{j \rightarrow \infty} E_{\tilde{z}}(p^j(\tau), V^{(j)}(\tau)) = (0, \mathbf{0}).$$

■

Resta analisar o que se passa com $\lim_{j \rightarrow \infty} E_{\tilde{z}}(p^j(\tau), V^{(j)}(\tau))$ quando $I^+ \cap I^\infty = \emptyset$.

Lema 2.5.3. *Seja $(p^j(\tau), V^{(j)}(\tau))_{j \in \mathbb{N}}$ uma sucessão nas condições do Lema 2.5.1 para a qual $I^+ \cap I^\infty = \emptyset$. Então, para cada $\tau \in \Upsilon$*

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\widehat{F}(\tilde{z}(\tau), p^j(\tau), V^{(j)}(\tau))}{L(\tilde{z}(\tau), p^j(\tau), V^{(j)}(\tau))} = \frac{\sum_{i \in I^+} \tilde{p}_i(\tau) \widehat{f}(\tilde{z}(\tau), \tilde{v}^i(\tau))}{\sum_{i \in I^+} \tilde{p}_i(\tau) l(\tilde{z}(\tau), \tilde{v}^i(\tau)) + w(\tau)}, \quad (2.5.56)$$

com $w(\tau) \in [0, +\infty]$.

Demonstração Se $I^+ \cap I^\infty = \emptyset$, a todos os valores de i tais que $\tilde{p}_i \neq 0$ correspondem sucessões $(v^{i(j)})_{j \in \mathbb{N}}$ limitadas. Neste caso designa-se por \tilde{v}^i o limite de $v^{i(j)}$, caso exista, ou de uma sua subsucessão convergente. Atendendo a (2.5.50) e ao Lema 2.5.1 vem

$$\lim_{j \rightarrow \infty} E_{\tilde{z}}(p^j(\tau), V^{(j)}(\tau)) = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i \in I^+} p_i^j(\tau) \widehat{f}(\tilde{z}(\tau), v^{i(j)}(\tau))}{\sum_{i \in I^+} p_s^j(\tau) l(\tilde{z}(\tau), v^{s(j)}(\tau)) + \sum_{i \in I^0} p_s^j(\tau) l(\tilde{z}(\tau), v^{s(j)}(\tau))}, \quad (2.5.57)$$

para cada $\tau \in \Upsilon$.

Além disso, se $\lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{i \in I^0} p_i^j l(\tilde{z}, v^{i(j)})$ for finito, então $\lim_{j \rightarrow \infty} E_{\tilde{z}}(p^j(\tau), V^{(j)}(\tau))$ é não nulo. Assim, para cada $\tau \in \Upsilon$, considere-se

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{i \in I^0} p_i^j l(\tilde{z}, v^{i(j)}) = w(\tau) \quad (2.5.58)$$

com $w(\tau) \in [0, +\infty]$. De (2.5.57)-(2.5.58) conclui-se que, para sucessões em que $I^+ \cap I^\infty = \emptyset$, se tem

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\widehat{F}(\tilde{z}(\tau), p^j(\tau), V^{(j)}(\tau))}{L(\tilde{z}(\tau), p^j(\tau), V^{(j)}(\tau))} = \frac{\sum_{i \in I^+} \tilde{p}_i(\tau) \widehat{f}(\tilde{z}(\tau), \tilde{v}^i(\tau))}{\sum_{i \in I^+} \tilde{p}_i(\tau) l(\tilde{z}(\tau), \tilde{v}^i(\tau)) + w(\tau)} \quad (2.5.59)$$

com $w(\tau) \in [0, +\infty]$. ■

Demonstração do Teorema 2.2.7 No problema compactificado, $P^{r,t,c}$, definido em (2.4.39)-(2.4.41) o conjunto dos controlos, $C\mathcal{U}$, é compacto. Além disso, do Lema 2.4.12 conclui-se que para cada $z \in A$ os conjuntos $P^e(\tau, z)$ são convexos para q.t. $\tau \in [0, \bar{\tau}]$. Aplicando o Teorema de Filippov conclui-se que existe minimizante do problema compactificado, isto é, existe uma solução admissível $(\tilde{z}(\tau), \tilde{\nu}(\tau)) = (\tilde{t}(\tau), \tilde{y}(\tau), \tilde{\nu}(\tau)) \in A \times C\mathcal{U}$ à qual corresponde $\bar{\tau}$ mínimo.

Resta provar que $\tilde{\nu}(\tau) \in \mathcal{U}$ para q.t. $\tau \in [0, \bar{\tau}]$.

Suponha-se que $\tilde{\nu}(\tau) \in C\mathcal{U} \setminus \mathcal{U}$ para $\tau \in \Upsilon \subset [0, \bar{\tau}]$ e $|\Upsilon| > 0$. De (2.4.40) e (2.5.42) existe $(p^j(\tau), V^{(j)}(\tau))_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{U} \setminus K$ com $K \subset \mathcal{U}$ compacto qualquer, tal que

$$\frac{d\tilde{z}}{d\tau}(\tau) = E_{\tilde{z}}^e(\tilde{\nu}(\tau)) = \tilde{\nu}(\tau) = \lim_{j \rightarrow \infty} E_{\tilde{z}}(p^j(\tau), V^{(j)}(\tau)). \quad (2.5.60)$$

Atendendo aos Lemas 2.5.1-2.5.3, para $\tau \in \Upsilon$, vem

$$\frac{d\tilde{z}}{d\tau}(\tau) = \frac{\sum_{i \in I^+} \tilde{p}_i(\tau) \hat{f}(\tilde{z}(\tau), \tilde{v}^i(\tau))}{\sum_{i \in I^+} \tilde{p}_i(\tau) l(\tilde{z}(\tau), \tilde{v}^i(\tau)) + w(\tau)} \quad (2.5.61)$$

com $w(\tau) \in]0, +\infty]$.

Assim, $\tilde{p}(\tau), V(\tau), w(\tau)$ fornecem uma parametrização para $\tilde{\nu}(\tau)$.

Se para $\tau \in \Upsilon$ se fizer $w(\tau) = 0$ resulta uma reparametrização de \tilde{z} em (2.5.61) num intervalo de tempo menor, o que contraria o facto de $(\tilde{z}(\tau), \tilde{\nu}(\tau))$ ser minimizante.

Assim, $\tilde{\nu}(\tau) \in \mathcal{U}$ para q.t. $\tau \in [0, \bar{\tau}]$ e, por conseguinte, $\tilde{\nu}(\tau) = (\tilde{p}(\tau), \tilde{V}(\tau))$.

Do Lema 2.3.1 resulta que $(\tilde{x}(t), \tilde{q}(t), \tilde{U}(t)) = (\tilde{y}(\tau(t)), \tilde{p}(\tau(t)), \tilde{V}(\tau(t)))$ é uma solução admissível do problema relaxado, para a qual o valor do funcional $J^r[\tilde{x}, \tilde{q}, \tilde{U}]$ coincide com $\bar{\tau}$.

Assim, $(\tilde{x}(t), \tilde{q}(t), \tilde{U}(t))$ é minimizante do problema relaxado. ■

Capítulo 3

Fenómeno de Lavrentiev

3.1 Introdução

Neste capítulo apresentam-se algumas generalidades sobre o fenómeno de Lavrentiev, fazendo referência a exemplos de problemas variacionais que exibem este fenómeno bem como a alguns resultados de regularidade dos minimizantes. Recorrendo a técnicas de reparametrização, na Secção 3.3 constroem-se alguns exemplos de problemas autónomos não regulares, em dimensões um e dois, que não exibem fenómeno de Lavrentiev. Na Secção 3.4 apresenta-se um exemplo de um problema variacional em 1D do tipo de Manià que exhibe fenómeno de Lavrentiev, e cuja demonstração serviu de ponto de partida para o resultado publicado em [12], o qual se apresenta na secção seguinte.

3.2 Generalidades sobre o Fenómeno de Lavrentiev

Com já foi referido no Capítulo 2, um problema do cálculo das variações pode ser reescrito como um problema de controlo óptimo, introduzindo o controlo $u(t) = x'(t)$. Assim, dados um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e uma função $f : \Omega \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{nm} \longrightarrow \mathbb{R}$, o problema básico do cálculo

das variações é minimizar o funcional

$$J[u] = \int_{\Omega} f(x, u(x), \nabla u(x)) dx,$$

numa classe \mathcal{A} de funções u . Tipicamente, considera-se \mathcal{A} um subespaço dum espaço de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$.

Considere-se o problema de determinar o

$$\inf_{u \in \mathcal{A}^p} J[u], \quad (3.2.1)$$

onde, para cada $p \in [1, +\infty]$, $\mathcal{A}^p \subset W^{1,p}(\Omega)$ é a classe das funções admissíveis $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ que satisfazem determinadas condições de fronteira.

Definição 3.2.1. Um problema do tipo (3.2.1) diz-se regular quando o Lagrangiano $f(x, u(x), \nabla u(x))$ é coercivo e convexo em relação ao gradiente.

Definição 3.2.2. Diz-se que um problema do tipo (3.2.1) exhibe o fenómeno de Lavrentiev quando

$$\inf_{u \in \mathcal{A}^{p_1}} J[u] < \inf_{u \in \mathcal{A}^{p_2}} J[u],$$

para algum $1 \leq p_1 < p_2 \leq \infty$, isto é, o ínfimo do funcional depende de p , ou seja, da regularidade imposta às funções admissíveis.

Exemplo 3.2.3. Exemplo de Lavrentiev

Em 1926 Lavrentiev [33] provou que o ínfimo do funcional $\int_0^1 e^{-\frac{2}{(u(x)-\sqrt{x})^2}} f(u'(x)) dx$, sobre a classe das funções absolutamente contínuas que satisfazem as condições de fronteira $u(0) = 0$ e $u(1) = 1$, é estritamente menor que o ínfimo sobre as funções continuamente diferenciáveis que satisfazem as mesmas condições de fronteira, onde a função f satisfaz determinadas condições ([33]; p.23-25).

Depois deste exemplo outros exemplos em dimensão um foram construídos. O que aparece mais vezes referenciado é o exemplo apresentado por Manià em 1934 ([20, 36]).

Exemplo 3.2.4. Exemplo de Manià

Neste exemplo o Lagrangiano é polinomial, $f(x, u, u') = (u^3 - x)^2 u'^6$, e o correspondente funcional apresenta $W^{1,1} - W^{1,\infty}$ Lavrentiev *gap*.

Contudo, este exemplo não satisfaz as condições de existência de Tonelli.

Em 1984 Ball e Mizel [7] construíram, em 1D, um funcional regular que exhibe fenómeno de Lavrentiev.

Exemplo 3.2.5. Exemplo de Ball e Mizel

Neste exemplo o Lagrangiano é do tipo $f(x, u(x), u'(x)) = (u^6(x) - x^4)^2 u'^{27}(x) + \varepsilon u'^2(x)$. Foi o primeiro exemplo a satisfazer as condições do Teorema de Tonelli.

Existem muitos outros exemplos de funcionais que exibem o fenómeno de Lavrentiev, bem como resultados de regularidade dos minimizantes, os quais excluem a ocorrência do fenómeno. Clarke e Vinter [19] provaram a regularidade lipschitziana para Lagrangianos autónomos em 1D, isto é, para Lagrangianos que não dependem explicitamente da variável independente. Sarychev [43] apresentou uma classe de problemas autónomos regulares de segunda ordem em 1D que exibem fenómeno de Lavrentiev. Mais recentemente, a este respeito existem resultados apresentados em [47], [40] e [21] entre outros que estendem os resultados apresentados em [19].

No caso multidimensional, em comparação com o que se passa em dimensão um, não existem tantos exemplos de funcionais que apresentam o fenómeno de Lavrentiev. Salienta-se o exemplo apresentado por Foss [26], onde são construídos funcionais, em 2D, cujo ínfimo depende continuamente do expoente do espaço de Sobolev ao qual pertencem as funções consideradas. Outros exemplos em dimensão superior a um podem ser encontrados em [2], [51] e [27]. Em [12] apresenta-se uma classe de problemas variacionais regulares em 2D,

$$J_\varepsilon[u] = \int_{\Omega} (u^l - t^k)^2 |\nabla u|^{2m} + \varepsilon |\nabla u|^r ds dt \longrightarrow \inf, \quad u(s, 0) = 0, \quad u(s, 1) = 1, \quad (3.2.2)$$

com $\Omega =]0, 1[\times]0, 1[$, $k < l < \frac{4}{3}k$, $2m \geq \frac{2k+1}{l-k}l$, $4 \leq r < \frac{l}{(l-k)}$, $l, m \in \mathbb{N}$, que exibem $W^{1,p} - W^{1,\infty}$ Lavrentiev *gap* para $p \in \left]2, \frac{1}{1-\frac{k}{l}}\right[$.

Resultados de regularidade dos minimizantes são importantes uma vez que excluem a ocorrência do fenómeno. Note-se que a presença do fenómeno de Lavrentiev pode levar a resultados incorrectos quando, na resolução de um problema variacional, se aplicam métodos numéricos. De facto, considere-se um funcional J semicontínuo inferiormente (basta que o Lagrangiano seja convexo em relação ao gradiente) e que verifique

$$\inf_{u \in \mathcal{A}^p} J[u] < \inf_{u \in \mathcal{A}^\infty} J[u],$$

para um dado $p < \infty$ e suponha-se que existe uma função $u_0 \in \mathcal{A}^p$ tal que

$$\inf_{u \in \mathcal{A}^p} J[u] = J[u_0].$$

Nestas condições, para qualquer sucessão $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}^\infty$, vem $\liminf_{n \rightarrow \infty} J[u_n] \geq \inf_{u \in \mathcal{A}^\infty} J[u]$, o qual é estritamente maior do que $J[u_0]$. Assim, por aplicação de um método numérico obtém-se $\inf_{u \in \mathcal{A}^\infty} J[u]$ como ínfimo de J , quando na realidade J assume um valor estritamente inferior em u_0 , mesmo quando $\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - u_0\|_{W^{1,p}} = 0$. Assim, técnicas para obter aproximações para o mínimo de um funcional que exhibe fenómeno de Lavrentiev podem levar a resultados incorrectos.

3.3 Construção de algumas sucessões minimizantes

Para alguns funcionais que não estão nas condições de ser possível aplicar um resultado de regularidade, ou para os quais não se conhecem resultados de regularidade, é possível concluir que não há fenómeno construindo sucessões de minimizantes. No que se segue apresentam-se dois exemplos de funcionais, um em 1D e outro em 2D, para os quais se constroem sucessões de minimizantes usando técnicas de reparametrização.

3.3.1 Exemplo em 1D

Na secção anterior foi referido que, em dimensão um, problemas autónomos que satisficam determinadas condições de regularidade não exibem fenómeno. Contudo, para alguns exemplos de problemas autónomos em 1D que não estão nas condições de regularidade conhecidas, é possível construir sucessões de minimizantes que permitem concluir a não existência de fenómeno. No que se segue apresenta-se um exemplo nestas condições.

Exemplo 3.3.1. Considere-se o funcional

$$J[u] = \int_0^1 (1 - 3u^2(x)u'(x))^2 (u'(x))^{2m} dx, \quad m \in \mathbb{N},$$

a classe de funções admissíveis,

$$\mathcal{A}^p = \left\{ u \in W^{1,p}([0, 1]) : u(0) = 0 \wedge u(1) = 1 \right\}$$

com $1 \leq p \leq \infty$, e o problema variacional

$$\inf_{u \in \mathcal{A}^p} J[u].$$

Uma vez que para $v(x) = (x)^{\frac{1}{3}}$, $J[v] = 0$ e $v \in \mathcal{A}^1$, vem

$$\inf_{u \in \mathcal{A}^1} J[u] = 0.$$

O funcional é autónomo mas não está nas condições de ser possível aplicar resultados conhecidos de regularidade, uma vez que o Lagrangiano nem é coercivo nem convexo em relação a u' .

Para mostrar que

$$\inf_{u \in \mathcal{A}^\infty} J[u] = 0$$

usa-se o resultado do lema que se segue.

Lema 3.3.2. *Seja $m \in \mathbb{N}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, existe L_n tal que*

$$3L_n^{-2m-2} - L_n^{-2m-3} - 3L_n^{2(-2m-2)} + L_n^{3(-2m-2)} - \frac{1}{(n+2)^{2m+1}} + \frac{1}{(n+2)^{6m}} = 0,$$

com

$$(n+2)^{\frac{1}{2m+2}} < L_n < (n+2).$$

Demonstração Seja $n \in \mathbb{N}$. Considere-se a função $f : [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = 3x^{-2m-2} - x^{-2m-3} - 3x^{2(-2m-2)} + x^{3(-2m-2)} - \frac{1}{(n+2)^{2m+1}} + \frac{1}{(n+2)^{6m}}.$$

Assim definida, f é contínua e como, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$f(n+2)f((n+2)^{\frac{1}{2m+2}}) < 0,$$

conclui-se que existe L_n tal que

$$(n+2)^{\frac{1}{2m+2}} < L_n < (n+2)$$

e

$$f(L_n) = 0.$$

■

No que se segue L_n tem o significado dado no lema anterior.

Para cada n natural considere-se

$$u_n(x) = \begin{cases} (n+2)x & , & 0 \leq x \leq \frac{1}{(n+2)^{2m+1}} \\ \left(x + \frac{1}{(n+2)^{6m}} - \frac{1}{(n+2)^{2m+1}}\right)^{\frac{1}{3}} & , & \frac{1}{(n+2)^{2m+1}} < x \leq 1 - L_n^{-2m-3} \\ L_n(x-1) + 1 & , & 1 - L_n^{-2m-3} < x \leq 1 \end{cases}.$$

Assim definida, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}^\infty$ e verifica

$$\int_{\frac{1}{(n+2)^{2m+1}}}^{1-L_n^{-2m-3}} (1 - 3u_n^2 u_n')^2 (u_n')^{2m} dx = 0,$$

$$\int_0^{\frac{1}{(n+2)^{2m+1}}} (1 - 3u_n^2 u_n')^2 (u_n')^{2m} dx = \left(\frac{1}{(n+2)} + \frac{9}{5(n+2)^{8m-1}} - \frac{2}{(n+2)^{4m}} \right)$$

e

$$\begin{aligned} \int_{1-L_n^{-2m-3}}^1 (1 - 3u_n^2 u_n')^2 (u_n')^{2m} dx &= L_n^{-3} + 9L_n^{-1} - 18L_n^{-2m-3} + 18L_n^{-4m-5} - 9L_n^{-6m-7} + \\ &+ \frac{9}{5}L_n^{-8m-9} - 6L_n^{-2} + 6L_n^{-2m-4} - 2L_n^{-4m-4}. \end{aligned}$$

Nestas condições,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{1}{(n+2)^{2m+1}}} (1 - 3u_n^2 u_n')^2 (u_n')^{2m} dx = 0$$

e, como $\lim_{n \rightarrow \infty} L_n = +\infty$, conclui-se que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{1-L_n^{-2m-3}}^1 (1 - 3u_n^2 u_n')^2 (u_n')^{2m} dx = 0.$$

Assim,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J[u_n] = 0,$$

e, consequentemente,

$$\inf_{u \in \mathcal{A}^\infty} J[u] = 0,$$

donde se conclui que não há fenómeno neste caso.

Nota 3.3.3. Se considerarmos uma perturbação do funcional do tipo

$$J_\varepsilon[u] = \int_0^1 (1 - 3u^2 u')^2 |u'|^{2m} + \varepsilon |u'|^\alpha dt, \quad u(0) = 0, \quad u(1) = 1,$$

com $\alpha > 1$ e $\varepsilon > 0$, o funcional está nas condições de regularidade enunciadas em [21], o que permite concluir que não existe fenómeno de Lavrentiev.

3.3.2 Exemplo em 2D

Resultados de regularidade em 2D são mais escassos, nomeadamente para o caso autónomo, que em 1D.

No que se segue apresenta-se um exemplo de um problema variacional autónomo em dimensão dois para o qual é possível, com recurso a técnicas de reparametrização, construir

sucessões de minimizantes que permitem concluir a não existência do fenómeno de Lavrentiev.

Exemplo 3.3.4. Considere-se o funcional

$$J[u] = \int_{]0,4[\times]0,1[} (1 - u^2(s, t)u_t(s, t))^2 u_s^{2m}(s, t) ds dt, \quad m \in \mathbb{N} \quad (3.3.3)$$

e o problema variacional

$$\inf_{u \in \mathcal{A}^p} J[u],$$

onde a classe de funções admissíveis é

$$\mathcal{A}^p = \left\{ u \in W^{1,p}([0, 4] \times]0, 1[) : u(0, t) = \sqrt[3]{3t + 0.5} \wedge u(4, t) = \sqrt[3]{3t - 3.5} \right\},$$

para $p \in [1, +\infty]$.

Lema 3.3.5. *Sejam $(s_0, t_0) \in [0, 4] \times [0, 1]$ e \hat{u} uma função tal que $\hat{u}(s_0, t_0) = u_0(s_0, t_0) = (3t_0 + \varphi(s_0))^{\frac{1}{3}}$ e $\hat{u}^2(s, t) \cdot \hat{u}_t(s, t) = 1 \quad \forall (s, t) \in]0, 4[\times]0, 1[$. Nestas condições,*

$$\hat{u}(s_0, t) = u_0(s_0, t), \quad \forall t \in [0, 1].$$

Demonstração Se \hat{u} satisfaz a equação diferencial, $\hat{u}^2(s, t) \cdot \hat{u}_t(s, t) = 1$ para todo o $(s, t) \in]0, 4[\times]0, 1[$, então $\hat{u}(s, t) = (3t + \psi(s))^{\frac{1}{3}}$. Por outro lado, se $\hat{u}(s_0, t_0) = (3t_0 + \varphi(s_0))^{\frac{1}{3}}$ vem $\psi(s_0) = \varphi(s_0)$ e, consequentemente, $\hat{u}(s_0, t) = (3t + \varphi(s_0))^{\frac{1}{3}} = u_0(s_0, t), \forall t \in [0, 1]$. ■

Para $v(s, t) = (3t - s + 0.5)^{\frac{1}{3}}$ o funcional J definido em (3.3.3) é nulo e, como $v \in \mathcal{A}^1$,

$$\inf_{u \in \mathcal{A}^1} J[u] = 0.$$

Contudo, v não pertence a \mathcal{A}^∞ uma vez que, na vizinhança de pontos da forma $(s, \frac{s - 0.5}{3})$, com $s \in [0.5, 3.5]$, as derivadas parciais de v não são limitadas. No que se segue constrói-se uma sucessão que, em determinadas partes de Ω , satisfaz a equação diferencial $1 - u^2 u_t = 0$, ou seja, u_n da forma $u_n(s, t) = (3t + \varphi(s, n))^{\frac{1}{3}}$, com φ a determinar de forma a que $u_n \in \mathcal{A}^\infty, \forall n \in \mathbb{N}$.

Seja $m \in \mathbb{N}$. Para cada $n \geq 2$ considere-se $s_{1n} = 0.5 - \frac{1}{n^{2m+1}}$, $s_{2n} = 0.5 + \frac{1}{n^{2m+1}}$, $s_{3n} = 3.5 - \frac{1}{n^{2m+1}}$ e $s_{4n} = 3.5 + \frac{1}{n^{2m+1}}$, as funções $t_{in}(s) = \frac{s - s_{in}}{3}$, $i = 1, 2$, e os subconjuntos

$$\Omega_1 = \left\{ (s, t) : 0 < s \leq s_{1n} \wedge 0 < t < 1 \right\},$$

$$\begin{aligned} \Omega_2 = & \left\{ (s, t) : (s_{1n} < s < s_{2n} \wedge 0 < t \leq t_{1n}(s)) \vee \right. \\ & \left. \vee (s_{2n} \leq s \leq s_{3n} \wedge t_{2n}(s) \leq t \leq t_{1n}(s)) \vee (s_{3n} < s \leq s_{4n} \wedge t_{2n}(s) \leq t \leq 1) \right\}, \end{aligned}$$

$$\Omega_3 = \left\{ (s, t) : s_{1n}(n) < s < s_{3n}(n) \wedge t_{1n}(s) < t < 1 \right\},$$

$$\Omega_4 = \left\{ (s, t) : s_{2n}(n) < s < s_{4n}(n), \wedge 0 < t < t_{2n}(s) \right\},$$

$$\Omega_5 = \left\{ (s, t) : s_{4n}(n) \leq s \leq 4 \wedge 0 \leq t \leq 1 \right\}.$$

Na parte Ω_2 , onde as derivadas parciais de v não são limitadas, considera-se u_n da forma $u_n(s, t) = n(3t - s + 0.5)$ e, usando o Lema 3.3.5, constrói-se u_n nas restantes partes do domínio. No que se segue exemplifica-se a construção de u_n em Ω_3 e Ω_1 , onde se pretende que u_n seja da forma

$$u_n(s, t) = (3t + \varphi(s, n))^{\frac{1}{3}}. \quad (3.3.4)$$

- Em Ω_3 calcula-se $\varphi(s, n)$ de modo a que

$$u_n(s, t_{1n}(s)) = \frac{1}{n^{2m}}$$

para $s_{1n} < s < s_{3n}$. Nestas condições vem

$$\varphi(s, n) = 0.5 - s + \frac{1}{n^{6m}} - \frac{1}{n^{2m+1}},$$

e ao substituir esta expressão de $\varphi(s, n)$ em (3.3.4) obtém-se

$$u_n(s, t) = \left(3t - s - \frac{1}{n^{2m+1}} + \frac{1}{n^{6m}} + 0.5 \right)^{\frac{1}{3}}$$

para expressão de u_n em Ω_3 .

- Em Ω_1 pretende-se u_n que satisfaça

$$u_n(s_{1n}, t) = \left(3t + \frac{1}{n^{6m}}\right)^{\frac{1}{3}} \text{ e } u_n(0, t) = (3t + 0.5)^{\frac{1}{3}},$$

para $0 \leq t \leq 1$.

Uma vez que para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n(0, 0) = (0.5)^{\frac{1}{3}} \text{ e } u_n(s_{1n}, 0) = \frac{1}{n^{2m}}$$

resulta $\varphi(0, n) = 0.5$ e $\varphi(s_{1n}, n) = \frac{1}{n^{6m}}$. Escolhendo para $\varphi(s, n)$ uma função afim vem

$$\varphi(s, n) = 0.5 - \frac{0.5 - \frac{1}{n^{6m}}}{0.5 - \frac{1}{n^{2m+1}}} s.$$

Substituindo esta expressão de $\varphi(s, n)$ em (3.3.4) obtém-se

$$u_n(s, t) = \left(3t - \frac{0.5 - \frac{1}{n^{6m}}}{0.5 - \frac{1}{n^{2m+1}}} s + 0.5\right)^{\frac{1}{3}}$$

para expressão de u_n em Ω_1 .

Seguindo a mesma técnica para os restantes subconjuntos, Ω_4 e Ω_5 , obtém-se

$$u_n(s, t) = \begin{cases} \left(3t - \frac{0.5 - \frac{1}{n^{6m}}}{0.5 - \frac{1}{n^{2m+1}}} s + 0.5\right)^{\frac{1}{3}} & , (s, t) \in \Omega_1 \\ n(3t - s + 0.5) & , (s, t) \in \Omega_2 \\ \left(3t - s - \frac{1}{n^{2m+1}} + \frac{1}{n^{6m}} + 0.5\right)^{\frac{1}{3}} & , (s, t) \in \Omega_3 \\ \left(3t - s + \frac{1}{n^{2m+1}} - \frac{1}{n^{6m}} + 0.5\right)^{\frac{1}{3}} & , (s, t) \in \Omega_4 \\ \left(3t - \frac{0.5 - \frac{1}{n^{6m}}}{0.5 - \frac{1}{n^{2m+1}}} (s - 4) - 3.5\right)^{\frac{1}{3}} & , (s, t) \in \Omega_5 \end{cases} . \quad (3.3.5)$$

Assim definida, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}^\infty$.

Em $\Omega_1 \cup \Omega_3 \cup \Omega_4 \cup \Omega_5$ vem

$$(1 - u_n^2(s, t)(u_n)_t(s, t))^2 = 0$$

e, conseqüentemente,

$$\int_{\Omega_1 \cup \Omega_3 \cup \Omega_4 \cup \Omega_5} (1 - u_n^2(u_n)_t)^2 (u_n)_s^{2m} ds dt = 0. \quad (3.3.6)$$

Em Ω_2 ,

$$\int_{\Omega_2} (1 - u_n^2(u_n)_t)^2 (u_n)_s^{2m} ds dt = n^{2m} \int_{\Omega_2} (1 - 3n^3(3t - s + 0.5)^2)^2 ds dt.$$

Como

$$\int_{s_{1n}}^{s_{2n}} \left[\int_0^{t_{1n}(s)} (1 - 3n^3(3t - s + 0.5)^2)^2 dt \right] ds \longrightarrow 0,$$

$$\int_{s_{2n}}^{s_{3n}} \left[\int_{t_{2n}(s)}^{t_{1n}(s)} (1 - 3n^3(3t - s + 0.5)^2)^2 dt \right] ds \longrightarrow 0$$

e

$$\int_{s_{3n}}^{s_{4n}} \left[\int_{t_2(s)}^1 (1 - 3n^3(3t - s + 0.5)^2)^2 dt \right] ds \longrightarrow 0$$

resulta

$$\int_{\Omega_2} (1 - u_n^2(u_n)_t)^2 (u_n)_s^{2m} ds dt \longrightarrow 0.$$

Assim,

$$\int_{\Omega} (1 - u_n^2(u_n)_t)^2 (u_n)_s^{2m} ds dt \longrightarrow 0,$$

donde se conclui que o funcional (3.3.3) não exhibe fenómeno.

Em dimensão dois nada se pode dizer sobre o caso em que o integrando satisfaz uma dada condição de crescimento. No decurso do presente trabalho houve uma tentativa de resolver o problema usando uma técnica semelhante à usada em [21], mas sem sucesso.

Na tabela (3.1) apresenta-se, de forma resumida, a relação entre a dimensão e a existência de resultados de regularidade ou de exemplos de problemas variacionais que exibem fenómeno de Lavrentiev.

É de salientar que para o caso autónomo bidimensional escalar ($m = 1$) existe um resultado de regularidade apresentado em [37] para um caso particular de Lagrangiano.

	$n = 1$	$n = 2$	
		$m = 1$	$m = 2$
$f(x, u, Du)$	Pode existir [36]	Pode existir [12]	Pode existir [10]
$f(u, Du)$	Não existe [10]	?	Pode existir [2]
$f(x, Du)$	Resultados de reg. [10], [51], [5]	Pode existir [10], [51], [5]	Pode existir [5]
$f(Du)$	Resultados de reg. [10], [51],	Resultados de reg. [46],[51]	Pode existir [10]

Tabela 3.1: Dimensão, resultados de regularidade e existência de fenómeno de Lavrentiev.

3.4 Exemplo de um funcional em 1D que exhibe fenómeno de Lavrentiev

No que se segue apresenta-se um exemplo, em 1D, de um problema variacional do tipo Manià que exhibe fenómeno Lavrentiev.

Considere-se o funcional

$$J[u] = \int_0^1 (u^2(x) - x)^2 u'^6(x) dx, \quad (3.4.7)$$

a classe

$$\mathcal{A}^p = \left\{ u \in W^{1,p}([0, 1]) : u(0) = 0 \wedge u(1) = 1 \right\},$$

com $1 \leq p \leq \infty$, e o problema variacional

$$\inf_{u \in \mathcal{A}^p} J[u]. \quad (3.4.8)$$

Para $u_0(x) = x^{\frac{1}{2}}$ vem $u_0 \in \mathcal{A}^p$ para $p \in [1, 2[$ e $J[u_0] = 0$. Como $J[u] \geq 0$, $\forall u \in \mathcal{A}^p$ para $p \in [1, +\infty]$, vem

$$\inf_{u \in \mathcal{A}^p} J[u] = 0,$$

para $p \in [1, 2[$.

Dado $u \in \mathcal{A}^\infty$, $u(0) = 0$, $u(1) = 1$ e u é lipschitziana. Nestas condições, o gráfico de u atravessa a região (Figura 3.1)

$$\mathcal{R} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1 \wedge 0 \leq y \leq \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} \right\}. \quad (3.4.9)$$

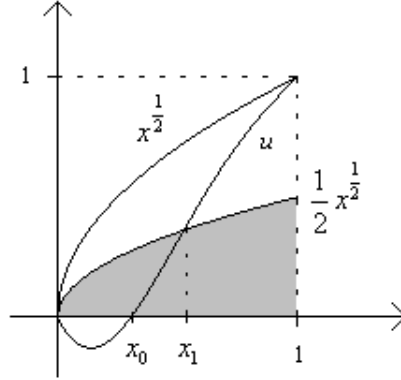


Figura 3.1: Região R .

Sejam

$$x_1 := \inf \{x \in]0, 1[: u(x) = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}\}$$

e

$$x_0 := \sup \{x \in [0, x_1[: u(x) = 0\}.$$

Assim, para $x \in [x_0, x_1]$ vem $0 \leq u(x) \leq \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}$, donde se conclui que

$$0 \leq 4u(x)^2 \leq x$$

e, consequentemente,

$$(u^2(x) - x)^2 [u'(x)]^6 \geq 9u^4(x) [u'(x)]^6, \forall x \in [x_0, x_1]. \quad (3.4.10)$$

Sendo assim, de (3.4.7) e (3.4.10)

$$J[u] \geq 9 \int_{x_0}^{x_1} u(x)^4 [u'(x)]^6 dx = 9 \left(\frac{3}{5} \right)^6 \int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{d}{dx} \left(u(x)^{\frac{5}{3}} \right) \right]^6 dx. \quad (3.4.11)$$

Aplicando a desigualdade de Jensen ao integral

$$\int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{d}{dx} \left(u(x)^{\frac{5}{3}} \right) \right]^6 dx$$

vem

$$\int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{d}{dx} \left(u(x)^{\frac{5}{3}} \right) \right]^6 dx \geq \frac{1}{(x_1 - x_0)^5} \left[\int_{x_0}^{x_1} \frac{d}{dx} \left(u(x)^{\frac{5}{3}} \right) dx \right]^6. \quad (3.4.12)$$

Uma vez que $u(x_0) = 0$ e $u(x_1) = \frac{1}{2}x_1^{\frac{1}{2}}$, de (3.4.11) e (3.4.12) resulta

$$J[u] \geq \frac{9}{2^{10}} \left(\frac{3}{5} \right)^6 \left(\frac{x_1}{(x_1 - x_0)} \right)^5 \geq \frac{9}{2^{10}} \left(\frac{3}{5} \right)^6, \quad \forall u \in \mathcal{A}^\infty$$

e, consequentemente,

$$\inf_{u \in \mathcal{A}^\infty} J[u] \geq \frac{9}{2^{10}} \left(\frac{3}{5} \right)^6.$$

Assim, para $p \in [1, 2[$

$$\inf_{u \in \mathcal{A}^p} J[u] = 0 < \frac{9}{2^{10}} \left(\frac{3}{5} \right)^6 \leq \inf_{u \in \mathcal{A}^\infty},$$

donde se conclui que o problema (3.4.8) exhibe fenómeno de Lavrentiev.

3.5 Extensão do exemplo de Manià a 2D

No que se segue apresenta-se uma extensão a dimensão dois do exemplo mais conhecido em dimensão um que é o exemplo de Manià. Além disso, prova-se que a classe de Lagrangianos cujos funcionais exibem fenómeno é invariante a certas perturbações aditivas, o que permite construir problemas regulares. Verifica-se ainda que é possível, nalguns casos, eliminar as condições de fronteira.

Nesta secção segue-se de muito perto o que foi publicado em [12]. Nesta referência trabalhou-se apenas com $p > 2$ uma vez que para estes casos, como já foi referido anteriormente, $W^{1,p}(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$. No que se segue trabalha-se com $p \in [1, +\infty]$ e as condições de fronteira são interpretadas como sendo o traço de u , como foi referido no Capítulo 1.

Nesta secção, sempre que nada seja indicado em contrário, considera-se $\Omega =]0, 1[\times]0, 1[$. Como neste caso o domínio é de Lipschitz, o operador traço está bem definido. Considere-se

$$\mathcal{A}^p = \{u \in W^{1,p}(\Omega) : u(s, 0) = 0 \wedge u(s, 1) = 1, \forall s \in [0, 1]\}, \quad (3.5.13)$$

para cada $p \in [1, +\infty]$.

A diferença significativa na demonstração entre o caso de dimensão um, apresentado na secção anterior, e o de dimensão dois que se apresenta nesta secção, está na prova da mensurabilidade de conjuntos que, no caso unidimensional são intervalos. Quando se passa para dimensão dois a estrutura da região correspondente à região R , definida em (3.4.9), é mais complicada no que diz respeito à mensurabilidade. Para provar a mensurabilidade dos conjuntos em causa recorre-se à semicontinuidade inferior de funções e, usando resultados conhecidos destas funções, mostra-se a mensurabilidade de outras funções.

Sejam l, k, m constantes positivas que satisfazem as condições

$$k < l, \quad 2m \geq \frac{2k+1}{l-k}l$$

e o problema variacional

$$J[u] = \int_{\Omega} (u^l(s, t) - t^k)^2 |\nabla u(s, t)|^{2m} ds dt \longrightarrow \inf, \quad u(s, 0) = 0, \quad u(s, 1) = 1. \quad (3.5.14)$$

Seja $u_0(s, t) = t^{\frac{k}{l}}$. Uma vez que $\frac{k}{l} < 1$, a função u_0 não é lipschitziana visto que u_t não é limitada em Ω . Por outro lado, $u_0 \in W^{1,p}(\Omega)$ para $p \in \left[1, \frac{1}{1-\frac{k}{l}}\right]$, verifica as condições de fronteira e $J[u_0] = 0$. Como $J[u] \geq 0$ para todo $u \in \mathcal{A}^p$ com $1 \leq p \leq \infty$, conclui-se que

$$\inf_{u \in \mathcal{A}^p} J[u] = 0,$$

para $p \in \left[1, \frac{1}{1-\frac{k}{l}}\right]$.

Pretende-se provar que o ínfimo de J é estritamente positivo na classe \mathcal{A}^∞ . Começa-se por provar alguns resultados auxiliares que serão necessários para o que se segue.

3.5.1 Lavrentiev gap

Lema 3.5.1. *Sejam $u \in A^\infty$ e l e k constantes positivas tais que $l > k > 0$. A função β definida por*

$$\beta(s) = \inf \{t \in]0, 1] : u(s, t) = \frac{1}{2}t^{\frac{k}{l}}\}, \quad s \in [0, 1] \quad (3.5.15)$$

é semicontínua inferiormente.

Demonstração Começa-se por provar que a função β está bem definida. Dado $u \in A^\infty$, u é lipschitziana e $u(s, 0) = 0$, para $s \in [0, 1]$. Nestas condições,

$$u(s, t) \leq |u(s, t) - u(s, 0)| \leq Lt, \quad \forall s \in [0, 1], \quad (3.5.16)$$

com L constante de Lipschitz.

Escolha-se $\underline{t} > 0$ tal que

$$L\underline{t}^{1-\frac{k}{l}} < \frac{1}{4}. \quad (3.5.17)$$

Note-se que existe \underline{t} nestas condições. Como $L \geq 1$, basta escolher $t < \left(\frac{1}{4L}\right)^{\frac{1}{1-\frac{k}{l}}} < \frac{1}{4}$.

Assim, de (3.5.16) e (3.5.17) para $0 \leq t \leq \underline{t}$, vem $Lt^{1-\frac{k}{l}} < \frac{1}{4}$ e, consequentemente, para $(s, t) \in [0, 1] \times]0, \underline{t}]$

$$\begin{aligned} u(s, t) - \frac{1}{2}t^{\frac{k}{l}} &\leq Lt - \frac{1}{2}t^{\frac{k}{l}} \\ &\leq \left(Lt^{1-\frac{k}{l}} - \frac{1}{2}\right)t^{\frac{k}{l}} \\ &\leq -\frac{1}{4}t^{\frac{k}{l}}, \end{aligned}$$

donde se conclui que

$$\forall (s, t) \in [0, 1] \times]0, \underline{t}], \quad u(s, t) - \frac{1}{2}t^{\frac{k}{l}} < 0.$$

Como ao longo de $t = 1$, $u(s, 1) = 1 > \frac{1}{2}$ e u é contínua, a definição de β em (3.5.15) faz sentido.

Seja $s_0 \in [0, 1]$ e $\beta(s_0) = t_0$. Da forma como foi escolhido \underline{t} em (3.5.17) e da definição de β resulta que $t_0 > \underline{t}$. Assim obtém-se

$$u(s_0, t_0) - \frac{1}{2}t_0^{\frac{k}{l}} = 0 \wedge u(s_0, t) - \frac{1}{2}t^{\frac{k}{l}} \neq 0 \text{ para } t \in]0, t_0[.$$

Por outro lado, como

$$u(s, t) - \frac{1}{2}t^{\frac{k}{l}} < 0 \text{ para } t \in]0, \underline{t}],$$

vem

$$u(s_0, t) - \frac{1}{2}t^{\frac{k}{l}} < 0 \text{ para } t \in]0, t_0[.$$

Seja $\delta > 0$.

Duas situações podem ocorrer:

i. δ é tal que $t_0 - \delta > \underline{t}$.

Nestas condições, para $\forall t \in [\underline{t}, t_0 - \delta]$, $u(s_0, t) - \frac{1}{2}t^{\frac{k}{l}} < 0$, o que permite concluir que

$$\max_{t \in [\underline{t}, t_0 - \delta]} \left(u(s_0, t) - \frac{1}{2}t^{\frac{k}{l}} \right) = \mu < 0.$$

Uma vez que u é lipschitziana, existe $\varepsilon > 0$ tal que para s que verifica $|s - s_0| < \varepsilon$ vem

$$\max_{t \in [\underline{t}, t_0 - \delta]} \left(u(s, t) - \frac{1}{2}t^{\frac{k}{l}} \right) < 0.$$

De facto, como

$$\begin{aligned} \max_{t \in [\underline{t}, t_0 - \delta]} \left(u(s, t) - \frac{1}{2}t^{\frac{k}{l}} \right) &= \max_{t \in [\underline{t}, t_0 - \delta]} \left(u(s, t) - u(s_0, t) + u(s_0, t) - \frac{1}{2}t^{\frac{k}{l}} \right) \\ &\leq \max_{t \in [\underline{t}, t_0 - \delta]} (u(s, t) - u(s_0, t)) + \max_{t \in [\underline{t}, t_0 - \delta]} \left(u(s_0, t) - \frac{1}{2}t^{\frac{k}{l}} \right) \\ &< L|s - s_0| + \mu, \end{aligned}$$

basta considerar $0 < \varepsilon < \frac{-\mu}{L}$.

Por outro lado,

$$u(s, t) - \frac{1}{2}t^{\frac{k}{l}} < 0, \forall (s, t) \in [0, 1] \times]0, \underline{t}].$$

Assim, para $t \in]0, t_0 - \delta]$ e s tal que $|s - s_0| < \varepsilon$, vem

$$u(s, t) - \frac{1}{2}t^{\frac{k}{i}} < 0.$$

Da definição de β resulta que, para s que satisfaça $|s - s_0| < \varepsilon$, vem $\beta(s) > t_0 - \delta$, ou seja, $\beta(s) > \beta(s_0) - \delta$.

ii. δ é tal que $t_0 - \delta \leq t$.

Neste caso, como $]0, t_0 - \delta] \subset]0, t_0]$, $u(s, t) - \frac{1}{2}t^{\frac{k}{i}} < 0$ para todo o $(s, t) \in [0, 1] \times]0, t_0 - \delta]$.

Sendo assim, $\beta(s) > t_0 - \delta$, ou seja, $\beta(s) > \beta(s_0) - \delta$.

De i. e ii. conclui-se que

$$\forall \delta > 0, \exists \varepsilon > 0 : \forall s \in [0, 1] : |s - s_0| < \varepsilon \Rightarrow \beta(s) > \beta(s_0) - \delta,$$

o que permite concluir que a função β é semicontínua inferiormente em s_0 . Como não foi colocada qualquer restrição a s_0 , conclui-se que β é semicontínua inferiormente. ■

Sabe-se que as projecções são aplicações abertas. No que segue é necessário usar um resultado que garanta que as projecções transformam abertos relativos em abertos relativos.

Observação 3.5.2. Dados um subconjunto $O = A_1 \times A_2 \subset \mathbb{R}^2$ e um aberto B de O , vem $B = O \cap C$, onde C é um aberto de \mathbb{R}^2 . Como todo o aberto de \mathbb{R}^2 é a união enumerável de bolas abertas, $C = \cup_{\alpha \in I} B_\alpha$, vem

$$\begin{aligned} \pi_s(B) &= \pi_s(O \cap (\cup_{\alpha \in I} B_\alpha)) = \cup_{\alpha \in I} \pi_s(O \cap B_\alpha) = \\ &= \cup_{\alpha \in I} \pi_s((A_1 \cap]a_\alpha - \delta, a_\alpha + \delta]) \times (A_2 \cap]b_\alpha - \delta, b_\alpha + \delta]) = \\ &= \cup_{\alpha \in I} A_1 \cap]a_\alpha - \delta, a_\alpha + \delta] = A_1 \cap (\cup_{\alpha \in I}]a_\alpha - \delta, a_\alpha + \delta]), \end{aligned}$$

donde se conclui que $\pi_s(B)$ é um aberto de A_1 .

Lema 3.5.3. *Sejam $u \in A^\infty$ e β a função definida em (3.5.15). A função α definida por*

$$\alpha(s) = \sup \{t \in [0, \beta(s)[: u(s, t) = 0\}, \quad s \in [0, 1] \quad (3.5.18)$$

é uma função mensurável.

Demonstração Para provar que α é mensurável é suficiente provar que, para cada $\gamma \in \mathbb{R}$, o conjunto

$$M^\gamma = \{s \in [0, 1] : \alpha(s) \geq \gamma\} \quad (3.5.19)$$

é mensurável. Basta considerar $\gamma \in]0, 1[$ uma vez que, para $\gamma \leq 0$ vem $M^\gamma = [0, 1]$ e para $\gamma \geq 1$ resulta $M^\gamma = \emptyset$, os quais são conjuntos mensuráveis.

Da definição de α e da continuidade de u resulta a seguinte caracterização

$$M^\gamma = \{s \in [0, 1] : \exists t \in [\gamma, \beta(s)]: u(s, t) = 0\}.$$

Considere-se o conjunto

$$B^\gamma = \{(s, t) \in [0, 1] \times [0, 1] : \gamma < t < \beta(s)\}.$$

Este conjunto é a intersecção do subgráfico de β , $\{(s, t) \in [0, 1] \times [0, 1] : t < \beta(s)\}$, com o semiplano aberto $t > \gamma$. Do facto de β ser semicontínua inferiormente conclui-se de [[30]; p.13] que o seu subgráfico, é aberto em $[0, 1] \times \mathbb{R}$. Sendo assim, B^γ é um conjunto aberto em $[0, 1] \times [0, 1]$, uma vez que é a intersecção de dois abertos.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ seja

$$B_n = \{(s, t) \in [0, 1] \times [0, 1] : |u(s, t)| < \frac{1}{n}\},$$

e a intersecção $B_n \cap B^\gamma$. Ambos são conjuntos abertos em $[0, 1] \times [0, 1]$.

Sejam π_s a projecção $\pi_s : [0, 1] \times [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ na 1^a componente e o conjunto

$$M_n^\gamma = \pi_s(B_n \cap B^\gamma).$$

Da Observação 3.5.2 conclui-se que M_n^γ é um conjunto aberto em $[0, 1]$ e, consequentemente, M_n^γ é mensurável. Da definição de M_n^γ resulta que

$$M_n^\gamma = \{s \in [0, 1] : \exists t \in]\gamma, \beta(s)]: |u(s, t)| < \frac{1}{n}\}. \quad (3.5.20)$$

No que se segue pretende-se mostrar que

$$M^\gamma = \bigcap_{n=1}^{\infty} M_n^\gamma.$$

Seja $s_0 \in M^\gamma$. Da definição de M^γ em (3.5.19) resulta que $\alpha(s_0) > \gamma$ ou $\alpha(s_0) = \gamma$. Se $\alpha(s_0) > \gamma$ então existe $t_0 \in]\gamma, \beta(s_0)[$ tal que $u(s_0, t_0) = 0$. Assim, $s_0 \in M_n^\gamma, \forall n \in \mathbb{N}$ e, consequentemente, $s_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} M_n^\gamma$.

Se $\alpha(s_0) = \gamma$, devido à continuidade de u , $u(s_0, \gamma) = 0$ e $u(s_0, t) > 0$, para todo $t \in]\gamma, \beta(s_0)[$.

Escolha-se $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\gamma + \frac{1}{n_0(L+1)} \in]\gamma, \beta(s_0)[$, com L a constante de Lipschitz de u .

Nestas condições,

$$\begin{aligned} 0 &< u\left(s_0, \gamma + \frac{1}{n_0(L+1)}\right) = \left| u\left(s_0, \gamma + \frac{1}{n_0(L+1)}\right) - u(s_0, \gamma) \right| \\ &\leq \frac{L}{n_0(L+1)} < \frac{1}{n_0}, \end{aligned}$$

donde se conclui que

$$\exists t = \gamma + \frac{1}{n_0(L+1)} \in]\gamma, \beta(s_0)[: |u(s_0, t)| < \frac{1}{n_0}.$$

Se $n < n_0$ vem $|u(s_0, t)| < \frac{1}{n_0} < \frac{1}{n}$.

Assim,

$$\exists t \in]\gamma, \beta(s_0)[: |u(s_0, t)| < \frac{1}{n},$$

donde se conclui que $s_0 \in M_n^\gamma$ para $n \leq n_0$.

Se $n > n_0$ vem

$$\gamma < \gamma + \frac{1}{n(L+1)} < \gamma + \frac{1}{n_0(L+1)},$$

donde se conclui que $\gamma + \frac{1}{n(L+1)} \in]\gamma, \beta(s_0)[$ e, como se viu anteriormente,

$$0 < u\left(s_0, \gamma + \frac{1}{n(L+1)}\right) \leq \frac{L}{n(L+1)} < \frac{1}{n},$$

donde resulta $s_0 \in M_n^\gamma$ para $n > n_0$. Assim, em qualquer dos casos, $s_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} M_n^\gamma$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e, consequentemente,

$$M^\gamma \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} M_n^\gamma. \quad (3.5.21)$$

Seja $s_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} M_n^\gamma$. Consequentemente, $s_0 \in M_n^\gamma$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e, da definição de M_n^γ em (3.5.20), existe $t_n \in]\gamma, \beta(s_0)[$ tal que $|u(s_0, t_n)| < \frac{1}{n}$. Constrói-se assim uma sucessão limitada, $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$, a qual possui uma subsucessão $(t_{\sigma(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ convergente, isto é, existe $t_0 \in [\gamma, \beta(s_0)]$ tal que $t_{\sigma(n)} \rightarrow t_0$. Da continuidade de u resulta $u(s_0, t_0) = 0$, e da definição de β vem $t_0 \neq \beta(s_0)$. Assim, $\exists t_0 \in [\gamma, \beta(s_0)[$ tal que $u(s_0, t_0) = 0$, donde se conclui que $s_0 \in M^\gamma$ e, consequentemente,

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} M_n^\gamma \subset M^\gamma. \quad (3.5.22)$$

Assim, de (3.5.21) e (3.5.22) vem

$$M^\gamma = \bigcap_{n=1}^{\infty} M_n^\gamma,$$

o que permite concluir que M^γ é mensurável visto ser a intersecção enumerável de conjuntos mensuráveis. ■

Sejam $u \in \mathcal{A}^\infty$ e as funções $\alpha(s)$ e $\beta(s)$ definidas em (3.5.15) e (3.5.18), respectivamente. O conjunto

$$A = \{(s, t) : s \in [0, 1] \wedge \alpha(s) \leq t \leq \beta(s)\} \quad (3.5.23)$$

é importante no que se segue. Uma vez que é necessário integrar sobre ele há necessidade de provar a sua mensurabilidade. É neste facto que reside a principal diferença entre o exemplo em 1D apresentado na Secção 3.4 e o exemplo em 2D que se apresenta nesta secção, uma vez que, no caso 1D o conjunto correspondente é um intervalo.

Lema 3.5.4. *Sejam $u \in \mathcal{A}^\infty$ e l e k constantes positivas tais que $k < l$. O conjunto A , definido por (3.5.23), é mensurável.*

Demonstração Do Lema 3.5.1 conclui-se que a função β é semicontínua inferiormente. Usando propriedades da semicontinuidade inferior ([25]; p.21) conclui-se que o *level set* $\{s \in [0, 1] : \beta(s) \leq c\}$ é fechado para todo o $c \in \mathbb{R}$. Sendo assim, a função β é mensurável. Como α e β são mensuráveis em $]0, 1[$, as funções $g_1(s, t) = \alpha(s) - t$ e $g_2(s, t) = \beta(s) - t$ são funções mensuráveis em $]0, 1[\times \mathbb{R}$. Assim, $A = \{(s, t) : s \in]0, 1[\wedge \alpha(s) \leq t\} \cap \{(s, t) : s \in]0, 1[\wedge \beta(s) \geq t\}$ é mensurável, pois é a intersecção de dois conjuntos mensuráveis. ■

Pode agora provar-se que o problema variacional apresentado em (3.5.14) exhibe fenómeno de Lavrentiev.

Teorema 3.5.5. *Sejam l, k, m constantes positivas que satisfazem as condições*

$$k < l, \quad 2m \geq \frac{2k+1}{l-k}l, \quad l, m \in \mathbb{N}.$$

Então, o problema variacional (3.5.14) exhibe $W^{1,p} - W^{1,\infty}$ Lavrentiev gap para qualquer $p \in \left[1, \frac{1}{1-\frac{k}{l}}\right]$.

Demonstração Pretende-se determinar o ínfimo de J sobre a classe \mathcal{A}^∞ . Seja $u \in \mathcal{A}^\infty$ e considere-se o conjunto A definido em (3.5.23). Para cada $(s, t) \in A$ verifica-se $0 \leq u(s, t) \leq \frac{1}{2}t^{\frac{k}{l}}$. Assim, para $(s, t) \in A$,

$$(u^l(s, t) - t^k)^2 \geq (2^l u^l(s, t) - u^l(s, t))^2 = (2^l - 1)^2 u^{2l}(s, t), \quad (3.5.24)$$

e, por conseguinte,

$$\begin{aligned} J[u] &= \int_{\Omega} (u^l(s, t) - t^k)^2 |\nabla u(s, t)|^{2m} ds dt \\ &\geq (2^l - 1)^2 \int_A u^{2l}(s, t) |\nabla u(s, t)|^{2m} dt ds \\ &\geq (2^l - 1)^2 \int_A \left(u^{\frac{l}{m}}(s, t) u_t(s, t)\right)^{2m} dt ds. \end{aligned} \quad (3.5.25)$$

A derivada parcial fraca $\left(u^{\frac{l}{m}+1}\right)_t$ é igual a $\frac{l+m}{m}u^{\frac{l}{m}}u_t$ em q.t.p. de A . Além disso, dado $u \in W^{1,\infty}(\Omega)$, $u^{\frac{l}{m}}$ e u_t estão em $L^\infty(\Omega)$, o que permite concluir que existe uma constante c_1 tal que $u^{\frac{l}{m}}(s, t) u_t(s, t) \leq c_1$ q.t. $(s, t) \in \Omega$. Como Ω tem medida finita resulta que $u^{\frac{l}{m}} u_t \in L^1(A)$.

Assim,

$$\begin{aligned} \int_A \left(u^{\frac{l}{m}}(s, t) u_t(s, t) \right)^{2m} dt ds &= \left(\frac{m}{m+l} \right)^{2m} \int_A \left(\left(u^{\frac{l}{m}+1} \right)_t(s, t) \right)^{2m} dt ds \\ &= \left(\frac{m}{m+l} \right)^{2m} \int_{\Omega} \chi_A \left(\left(u^{\frac{l}{m}+1} \right)_t(s, t) \right)^{2m} dt ds, \end{aligned}$$

onde χ_A designa a função característica no conjunto A . Aplicando o Teorema de Fubini ao integral do 2º membro obtém-se

$$\int_A \left(u^{\frac{l}{m}}(s, t) u_t(s, t) \right)^{2m} dt ds = \left(\frac{m}{m+l} \right)^{2m} \int_0^1 \left(\int_0^1 \chi_A \left(\left(u^{\frac{l}{m}+1} \right)_t(s, t) \right)^{2m} dt \right) ds. \quad (3.5.26)$$

De (3.5.25)-(3.5.26) resulta

$$J[u] \geq (2^l - 1)^2 \left(\frac{m}{m+l} \right)^{2m} \int_0^1 \left(\int_{\alpha(s)}^{\beta(s)} \left(\left(u^{\frac{l}{m}+1} \right)_t(s, t) \right)^{2m} dt \right) ds. \quad (3.5.27)$$

Para cada $s \in [0, 1]$, por aplicação da desigualdade de Jensen vem

$$\int_{\alpha(s)}^{\beta(s)} \left(\left(u^{\frac{l}{m}+1} \right)_t(s, t) \right)^{2m} dt \geq \frac{1}{(\beta(s) - \alpha(s))^{2m-1}} \left(\int_{\alpha(s)}^{\beta(s)} \left(u^{\frac{l}{m}+1} \right)_t(s, t) dt \right)^{2m}. \quad (3.5.28)$$

Usando o Lema da integração parcial apresentado no Capítulo 1, com $v = u^{\frac{l}{m}+1}$, obtém-se

$$\int_{\alpha(s)}^{\beta(s)} \left(u^{\frac{l}{m}+1} \right)_t(s, t) dt = u^{\frac{l}{m}+1}(s, \beta(s)) - u^{\frac{l}{m}+1}(s, \alpha(s)) \text{ q.t. } s \in [0, 1].$$

Uma vez que $u(s, \alpha(s)) = 0$ e $u(s, \beta(s)) = \frac{1}{2}\beta(s)^{\frac{k}{l}}$, vem

$$\left(\int_{\alpha(s)}^{\beta(s)} \left(u^{\frac{l}{m}+1} \right)_t(s, t) dt \right)^{2m} = \left(\frac{1}{2} \right)^{2m \left(\frac{l}{m} + 1 \right)} \beta^{2m \frac{k}{l} \left(\frac{l}{m} + 1 \right)}(s) \text{ q.t. } s \in [0, 1]. \quad (3.5.29)$$

Suponhamos em primeiro lugar que $2m = \frac{2k+1}{l-k}l$. Nestas condições, $2m-1 = 2m \frac{k}{l} \left(\frac{l}{m} + 1 \right)$

e, como $\frac{\beta(s)}{\beta(s) - \alpha(s)} \geq 1$, vem

$$\frac{\beta(s)^{2m \frac{k}{l} \left(\frac{l}{m} + 1 \right)}}{(\beta(s) - \alpha(s))^{2m-1}} \geq 1. \quad (3.5.30)$$

Se $2m > \frac{2k+1}{l-k}l$, então $2m \frac{k}{l} \left(\frac{l}{m} + 1 \right) - 2m + 1 < 0$ ¹ e, conseqüentemente,

$$\frac{\beta(s)^{2m \frac{k}{l} (\frac{l}{m} + 1)}}{(\beta(s) - \alpha(s))^{2m-1}} \geq \frac{\beta(s)^{2m \frac{k}{l} (\frac{l}{m} + 1)}}{(\beta(s))^{2m-1}} = \beta(s)^{2m \frac{k}{l} (\frac{l}{m} + 1) - 2m + 1} > 1. \quad (3.5.31)$$

Como por hipótese $2m \geq \frac{2k+1}{l-k}l$, de (3.5.27)-(3.5.31) obtém-se

$$J[u] \geq \frac{(2^l - 1)^2}{2^{2m(\frac{l}{m} + 1)}} \left(\frac{m}{l + m} \right)^{2m},$$

para todo $u \in \mathcal{A}^\infty$. Assim, é possível concluir que

$$\inf_{u \in \mathcal{A}^\infty} J[u] \geq \frac{(2^l - 1)^2}{2^{2m(\frac{l}{m} + 1)}} \left(\frac{m}{l + m} \right)^{2m} > 0. \quad (3.5.32)$$

■

Nota 3.5.6. Com base na demonstração da existência de $W^{1,p} - W^{1,\infty}$ Lavrentiev gap é possível estimar o seu valor. Assim, é possível dizer que para o problema variacional

$$J[u] = \int_{\Omega} (u^l(s, t) - t^k)^2 |\nabla u(s, t)|^{2m} ds dt, \longrightarrow \inf, \quad u(s, 0) = 0, \quad u(s, 1) = 1,$$

o valor $\inf_{u \in \mathcal{A}^\infty} J[u] - \inf_{u \in \mathcal{A}^p} J[u]$ é não inferior a $\frac{(2^l - 1)^2}{2^{2m(\frac{l}{m} + 1)}} \left(\frac{m}{l + m} \right)^{2m}$, para $p \in \left[1, \frac{1}{1 - \frac{k}{l}} \right[$.

Exemplo 3.5.7. Escolhendo, por exemplo, $k = 4, l = 5, m = 23$, o correspondente problema variacional

$$J[u] = \int_{\Omega} (u^5(s, t) - t^4)^2 |\nabla u(s, t)|^{46} ds dt, \longrightarrow \inf, \quad u(s, 0) = 0, \quad u(s, 1) = 1$$

exibe $W^{1,p} - W^{1,\infty}$ Lavrentiev gap para todo o $p \in [1, 5[$ e

$$\inf_{u \in \mathcal{A}^\infty} J[u] - \inf_{u \in \mathcal{A}^p} J[u] \geq \frac{(2^5 - 1)^2}{2^{56}} \left(\frac{23}{28} \right)^{46}.$$

¹Considerando a função $g(x) = \frac{k}{l} \left(\frac{2l}{x} + 1 \right) x - x + 1$ vem $g \left(\frac{2k+1}{l-k}l \right) = 0$ e g estritamente decrescente.

Assim, para $x > \frac{2k+1}{l-k}l$, vem $g(x) < 0$.

Nota 3.5.8. No caso de $2m < \frac{2k+1}{l-k}l$ o funcional J não exibe fenómeno de Lavrentiev uma vez que a sucessão $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definida por

$$u_n(s, t) = \begin{cases} n^{(1-\frac{k}{l})} t & , \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{n}, s \in [0, 1] \\ t^{\frac{k}{l}} & , \quad \frac{1}{n} \leq t \leq 1, s \in [0, 1] \end{cases}$$

é tal que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}^\infty$ e

$$J[u_n] = \frac{1}{n^{2k+1-2m(1-\frac{k}{l})}} \left(\frac{1}{2l+1} + \frac{1}{2k+1} - \frac{2}{l+k+1} \right).$$

Como $2k+1-2m(1-\frac{k}{l}) > 0$ conclui-se que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} J[u_n] = 0.$$

3.5.2 Persistência do fenómeno de Lavrentiev

Teorema 3.5.9. *Sejam k, l, m constantes nas condições do Teorema 3.5.5 e $2 < r < \frac{l}{l-k}$. Então, existe ε_0 tal que para todo o ε que verifique $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, o funcional*

$$J_\varepsilon[u] = \int_{\Omega} (u^l(s, t) - t^k)^2 |\nabla u(s, t)|^{2m} + \varepsilon |\nabla u(s, t)|^r ds dt,$$

sobre as condições de fronteira $u(s, 0) = 0$ e $u(s, 1) = 1$, exibe $W^{1,p} - W^{1,\infty}$ Lavrentiev gap para qualquer $p \in \left[1, \frac{1}{1-\frac{k}{l}}\right]$.

Demonstração Considere-se o funcional

$$P[u] = \int_{\Omega} (|u_s(s, t)|^2 + |u_t(s, t)|^2)^{\frac{r}{2}} ds dt.$$

Uma vez que

$$P \left[t^{\frac{k}{l}} \right] = \int_{\Omega} \left(\frac{k}{l} t^{\frac{k}{l}-1} \right)^r ds dt = \left(\frac{k}{l} \right)^r \frac{1}{r \left(\frac{k}{l} - 1 \right) + 1} =: c,$$

e $J_\varepsilon[u] = J[u] + \varepsilon P[u]$, resulta

$$\inf_{u \in A^p} J_\varepsilon[u] \leq \varepsilon P \left[t^{\frac{k}{l}} \right] = \varepsilon \cdot c,$$

para $p \in \left[1, \frac{1}{1-\frac{k}{l}}\right]$. Seja $\varepsilon > 0$ tal que

$$\varepsilon < \varepsilon_0 = c^{-1} \frac{(2^l - 1)^2}{2^{2m(\frac{l}{m}+1)}} \left(\frac{m}{l+m}\right)^{2m}. \quad (3.5.33)$$

Uma vez que $\inf_{u \in \mathcal{A}^\infty} J[u] \geq \frac{(2^l - 1)^2}{2^{2m(\frac{l}{m}+1)}} \left(\frac{m}{l+m}\right)^{2m}$, para $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ e para todo o $p \in \left[1, \frac{1}{1-\frac{k}{l}}\right]$ verifica-se

$$\inf_{u \in \mathcal{A}^p} J_\varepsilon[u] < \varepsilon_0 \cdot c \leq \inf_{u \in \mathcal{A}^\infty} J[u],$$

isto é

$$\inf_{u \in \mathcal{A}^p} J_\varepsilon[u] < \inf_{u \in \mathcal{A}^\infty} J[u]. \quad (3.5.34)$$

Por outro lado,

$$\inf_{u \in \mathcal{A}^\infty} J[u] \leq \inf_{u \in \mathcal{A}^\infty} (J[u] + \varepsilon P[u]) = \inf_{u \in \mathcal{A}^\infty} J_\varepsilon[u]. \quad (3.5.35)$$

Assim, de (3.5.34) e de (3.5.35) resulta que para $p \in \left[1, \frac{1}{1-\frac{k}{l}}\right]$,

$$\inf_{u \in \mathcal{A}^p} J_\varepsilon[u] < \inf_{u \in \mathcal{A}^\infty} J_\varepsilon[u],$$

e, consequentemente, o funcional J_ε exhibe fenómeno de Lavrentiev, o que prova que o fenómeno persiste a certas perturbações aditivas. ■

Exemplo 3.5.10. Considere-se $k = 4$, $l = 5$, $m = 23$ e $r = 4$. O correspondente problema variacional

$$J[u] = \int_{\Omega} (u^5(s, t) - t^4)^2 |\nabla u(s, t)|^{46} + \varepsilon |\nabla u|^4 ds dt, \longrightarrow \inf, \quad u(s, 0) = 0, \quad u(s, 1) = 1$$

exibe $W^{1,p} - W^{1,\infty}$ Lavrentiev gap para todo o $p \in [1, 5[$ e para ε entre zero e $\frac{(2^5 - 1)^2 5^3}{2^{64}} \left(\frac{23}{28}\right)^{46}$.

O Lagrangiano $f_\varepsilon(s, t, u, u_s, u_t) = (u^l(s, t) - t^k)^2 |\nabla u(s, t)|^{2m} + \varepsilon |\nabla u|^r$ é coercivo mas pode não ser convexo em relação a $\nabla u = (u_s, u_t)$. Contudo, com uma escolha apropriada de l e r , é possível garantir a convexidade de f_ε em relação ao gradiente.

Teorema 3.5.11. *Sejam k, l, m constantes positivas satisfazendo*

$$k < l < \frac{4}{3}k, \quad 2m \geq \frac{2k+1}{l-k}l, \quad 4 < r < \frac{l}{(l-k)} \quad l, m \in \mathbb{N}.$$

Então, existe ε_0 tal que para todo o ε que verifique $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ o problema variacional

$$J_\varepsilon[u] = \int_{\Omega} (u^l(s, t) - t^k)^2 |\nabla u(s, t)|^{2m} + \varepsilon |\nabla u(s, t)|^r ds dt, \longrightarrow \inf, \quad u(s, 0) = 0, \quad u(s, 1) = 1, \quad (3.5.36)$$

é regular e exibe $W^{1,p} - W^{1,\infty}$ Lavrentiev gap para qualquer $p \in \left[1, \frac{1}{1-\frac{k}{l}}\right]$.

Demonstração A demonstração de que o problema (3.5.36) exibe fenómeno de Lavrentiev é análoga à do Teorema 3.5.9. Além disso, para k, l, m e r nas condições indicadas o Lagrangiano

$$f_\varepsilon(s, t, u(s, t), u_s(s, t), u_t(s, t)) = (u^l(s, t) - t^k)^2 |\nabla u(s, t)(s, t)|^{2m} + \varepsilon |\nabla u(s, t)|^r$$

é coercivo e convexo em relação ao gradiente. ■

Na nota que se segue mostra-se que é possível considerar outro tipo de perturbações aditivas.

Nota 3.5.12. Considere-se a função $h : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que:

- i. $h(s, t, u(s, t), \nabla u(s, t)) \geq 0$ para todo $(s, t) \in \Omega$ e todo o $u \in \mathcal{A}^p$;
- ii. $\int_{\Omega} h(s, t, u_0(s, t), \nabla u_0(s, t)) ds dt = c < \infty$, para $u_0 = t^{\frac{k}{l}}$,

e o problema variacional

$$J_\varepsilon[u] = \int_{\Omega} (u^l(s, t) - t^k)^2 |\nabla u(s, t)|^{2m} + \varepsilon h(s, t, u(s, t), \nabla u(s, t)) ds dt, \longrightarrow \inf, \quad u \in \mathcal{A}^p, \quad (3.5.37)$$

com $1 \leq p \leq \infty$.

Nestas condições, existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que para todo o ε que verifique $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ e para

$$p \in \left[1, \frac{1}{1-\frac{k}{l}}\right] \text{ vem}$$

$$\inf_{u \in \mathcal{A}^p} J_\varepsilon[u] < \inf_{u \in \mathcal{A}^\infty} J_\varepsilon[u],$$

ou seja, o fenómeno persiste a este tipo de perturbações aditivas.

De facto, considerando

$$P[u] = \int_{\Omega} h(s, t, u, \nabla u) ds dt$$

vem $J_{\varepsilon}[u] = J[u] + \varepsilon P[u]$ e, como $P[u] \geq 0$, $J_{\varepsilon}[u] \geq J[u]$.

Duas situações podem ocorrer : $P[u_0] = 0$ ou $P[u_0] = c > 0$.

Se $P[u_0] = 0$ vem

$$\begin{aligned} \inf_{u \in A^{\infty}} J_{\varepsilon}[u] &\geq \inf_{u \in A^{\infty}} J[u] \\ &> \inf_{u \in A^p} J[u] = J[u_0] = J_{\varepsilon}[u_0] = \inf_{u \in A^p} J_{\varepsilon}[u], \end{aligned}$$

donde se conclui que

$$\inf_{u \in A^p} J_{\varepsilon}[u] < \inf_{u \in A^{\infty}} J_{\varepsilon}[u],$$

para todo o $\varepsilon > 0$ e para $1 \leq p < \frac{1}{1 - \frac{k}{l}}$.

Se $P[u_0] = c > 0$, seja

$$\varepsilon_0 = c^{-1} \frac{(2^l - 1)^2}{2^{2m(\frac{l}{m} + 1)}} \left(\frac{m}{l + m} \right)^{2m}.$$

Para $1 \leq p < \frac{1}{1 - \frac{k}{l}}$ e $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ vem

$$\inf_{u \in A^p} J_{\varepsilon}[u] < \varepsilon_0 \cdot c \leq \inf_{u \in A^{\infty}} J[u]$$

e, consequentemente,

$$\inf_{u \in A^p} J_{\varepsilon}[u] < \inf_{u \in A^{\infty}} J[u] \leq \inf_{u \in A^{\infty}} J_{\varepsilon}[u],$$

para $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$.

Em qualquer dos casos, para $1 \leq p < \frac{1}{1 - \frac{k}{l}}$ e $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$

$$\inf_{u \in A^p} J_{\varepsilon}[u] < \inf_{u \in A^{\infty}} J_{\varepsilon}[u],$$

o que prova que o fenómeno persiste. Se h for coerciva e convexa em relação ao gradiente o funcional J_{ε} é regular.

3.5.3 Fronteira livre

Verifica-se facilmente que ao eliminar uma das condições de fronteira $u(s, 0) = 0$ ou $u(s, 1) = 1$ o problema variacional definido em (3.5.14) deixa de exibir fenómeno. Com efeito, para $u_1(s, t) = c$, com c constante apropriada, vem $J[u_1] = 0$.

No que se segue apresenta-se uma classe de problemas variacionais construída à custa da apresentada anteriormente, problemas esses que exibem fenómeno de Lavrentiev, mesmo quando se considera uma ou nenhuma das condições de fronteira. Para tal será necessário provar a mensurabilidade de certos conjuntos.

Lema 3.5.13. *Sejam $t_0 \in]0, 1[$, $u \in W^{1,\infty}(\Omega)$ tal que $u(s, t) < \frac{1}{2}t^{\frac{k}{l}}$, $\forall (s, t) \in [0, 1] \times]0, t_0]$, l e k constantes nas condições da Teorema 3.5.5 e D um subconjunto fechado de $[0, 1]$. Então, os conjuntos*

$$B_1 = \left\{ s \in D : \exists t \in]t_0, 1] : u(s, t) \geq \frac{1}{2}t^{\frac{k}{l}} \right\} \quad (3.5.38)$$

e

$$B_2 = \left\{ s \in D : u(s, t) < \frac{1}{2}t^{\frac{k}{l}}, \forall t \in]0, 1] \right\} \quad (3.5.39)$$

são conjuntos mensuráveis.

Demonstração Da continuidade de u resulta que os conjuntos

$$B = \left\{ (s, t) \in D \times [t_0, 1] : u(s, t) > \frac{1}{2}t^{\frac{k}{l}} \right\},$$

$$C_n = \left\{ (s, t) \in D \times [t_0, 1] : \left| u(s, t) - \frac{1}{2}t^{\frac{k}{l}} \right| < \frac{1}{n} \right\}, n \in \mathbb{N}$$

são abertos em $D \times [t_0, 1]$.

Considere-se a projecção π_s na 1ª componente, e as correspondentes imagens

$$\pi_s(B) = B'_1 = \left\{ s \in D : \exists t \in]t_0, 1] : u(s, t) - \frac{1}{2}t^{\frac{k}{l}} > 0 \right\}$$

e

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \pi_s(C_n) = B''_1 = \left\{ s \in D : \exists t \in]t_0, 1] : u(s, t) - \frac{1}{2}t^{\frac{k}{l}} = 0 \right\}.$$

Uma vez que

$$B_1 = B'_1 \cup B''_1$$

e os conjuntos B'_1 e $\pi_s(C_n)$ são abertos em D , então os conjuntos B'_1 e B''_1 são mensuráveis. Assim, B_1 é mensurável e, conseqüentemente, B_2 também é mensurável visto que $B_2 = D \setminus B_1$. ■

Teorema 3.5.14. *Sejam l, k, m constantes nas condições do Teorema 3.5.5. Então, o problema variacional*

$$\bar{J}[u] = \int_{\Omega} (u^l(s, t) - t^k)^2 (|\nabla u(s, t)|^{2m} + 1) ds dt \longrightarrow \inf, \quad u(s, 0) = 0 \quad (3.5.40)$$

exibe $W^{1,p} - W^{1,\infty}$ Lavrentiev gap para todo o $p \in \left[1, \frac{1}{1-\frac{k}{l}}\right]$.

Demonstração Uma vez que \bar{J} é não negativa e $\bar{J}\left[t^{\frac{k}{l}}\right] = 0$ resulta que

$$\inf_{u \in \mathcal{A}^p} \bar{J}[u] = 0,$$

para $p \in \left[1, \frac{1}{1-\frac{k}{l}}\right]$.

Como $\bar{J}[u] \geq J[u]$ para todo $u \in \mathcal{A}^\infty$, de (3.5.32) conclui-se que

$$\inf_{u \in \mathcal{A}^\infty} \bar{J}[u] \geq \inf_{u \in \mathcal{A}^\infty} J[u] \geq \frac{(2^l - 1)^2}{2^{2m(\frac{l}{m}+1)}} \left(\frac{m}{l+m}\right)^{2m} > 0,$$

e, por conseguinte, o problema variacional $\bar{J}[u] \longrightarrow \inf, \quad u(s, 0) = 0, u(s, 1) = 1$ exibe fenómeno de Lavrentiev.

Para $p \in [1, +\infty]$ seja

$$\mathcal{A}_0^p = \{u \in W^{1,p}(\Omega) : u(s, 0) = 0 \quad \forall s \in [0, 1]\}. \quad (3.5.41)$$

Uma vez que $t^{\frac{k}{l}} \in \mathcal{A}_0^p$, quando $p \in \left[1, \frac{1}{1-\frac{k}{l}}\right]$ vem

$$\inf_{u \in \mathcal{A}_0^p} \bar{J}[u] = 0,$$

para esses valores de p .

Pretende-se provar que

$$\inf_{u \in \mathcal{A}_0^\infty} \bar{J}[u] > 0.$$

Considere-se em primeiro lugar que l é ímpar. Uma vez que, dado $u \in \mathcal{A}_0^\infty$, u é lipschitziana e $u(s, 0) = 0$, então para alguma constante L

$$u(s, t) \leq |u(s, t) - u(s, 0)| \leq Lt$$

para todo $(s, t) \in [0, 1] \times [0, 1]$.

Seja $\underline{t} \in]0, 1]$ tal que $L\underline{t}^{1-\frac{k}{l}} < \frac{1}{4}$. Usando os mesmos argumentos que foram usados para provar o Lema 3.5.1 verifica-se que

$$\forall (s, t) \in [0, 1] \times]0, \underline{t}], \quad u(s, t) - \frac{1}{2}t^{\frac{k}{l}} < 0. \quad (3.5.42)$$

Considere-se $D = [0, 1]$ em (3.5.38)-(3.5.39) e $t_0 = \underline{t}$ em (3.5.38). Do Lema 3.5.13 resulta que ambos os conjuntos B_1 e B_2 , definidos por (3.5.38)-(3.5.39), são mensuráveis e $|B_1| \geq \frac{1}{2}$ ou $|B_2| \geq \frac{1}{2}$.

Suponhamos em primeiro lugar que $|B_2| \geq \frac{1}{2}$. Uma vez que l é ímpar, então

$$u(s, t) - \frac{1}{2}t^{\frac{k}{l}} < 0 \iff u^l(s, t) < \frac{1}{2^l}t^k \implies (u^l - t^k)^2 > \left(\frac{1}{2^l} - 1\right)^2 t^{2k}.$$

Assim, para l ímpar e $u \in \mathcal{A}_0^\infty$, tal que $|B_2| \geq \frac{1}{2}$, da aplicação do Teorema de Fubini resulta

$$\begin{aligned} \bar{J}[u] &= \int_{\Omega} (u^l(s, t) - t^k)^2 (|\nabla u(s, t)|^{2m} + 1) ds dt \geq \int_{\Omega} (u^l(s, t) - t^k)^2 ds dt \\ &\geq \left(\frac{1}{2^l} - 1\right)^2 \int_{B_2} \left(\int_0^1 t^{2k} dt\right) ds \geq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2^l} - 1\right)^2 \frac{1}{2k+1} = c_1 > 0. \end{aligned} \quad (3.5.43)$$

No caso de $|B_2| < \frac{1}{2}$, vem $|B_1| \geq \frac{1}{2}$. Dado $s \in B_1$ considere-se a função β definida por

$$\beta(s) = \inf \{t \in]0, 1] : u(s, t) = \frac{1}{2}t^{\frac{k}{l}}\}. \quad (3.5.44)$$

Da definição de B_1 , de (3.5.42) e da continuidade de u conclui-se que $\exists t \in]\underline{t}, 1]$ tal que $u(s, t) = \frac{1}{2}t^{\frac{k}{l}}$. Assim, a função β está bem definida.

Seja

$$\alpha(s) = \sup \{t \in [0, \beta(s)[: u(s, t) = 0\}, s \in B_1. \quad (3.5.45)$$

Usando argumentos semelhantes aos usados para provar os Lemas 3.5.1 e 3.5.3 conclui-se que β é semicontínua inferiormente e que α é mensurável.

Seja $A_2 = \{(s, t) : s \in B_1 \wedge \alpha(s) \leq t \leq \beta(s)\}$. Prova-se, de modo análogo ao que se fez na demonstração do Lema 3.5.4, que A_2 é mensurável. Por outro lado, para cada $(s, t) \in A_2$, verifica-se que $0 \leq u(s, t) \leq \frac{1}{2}t^{\frac{k}{l}}$. Assim, para $(s, t) \in A_2$ vem

$$(u^l(s, t) - t^k)^2 \geq (2^l u^l(s, t) - u^l(s, t))^2 = (2^l - 1)^2 u^{2l}(s, t)$$

e, consequentemente,

$$\begin{aligned} \bar{J}[u] &= \int_{\Omega} (u^l(s, t) - t^k)^2 (|\nabla u(s, t)|^{2m} + 1) ds dt \\ &\geq \int_{A_2} (u^l(s, t) - t^k)^2 (u_t^{2m}(s, t)) ds dt \\ &\geq (1 - 2^l)^2 \int_{A_2} u^{2l}(s, t) u_t^{2m}(s, t) dt ds. \end{aligned}$$

Conclui-se, de forma análoga ao que se fez na demonstração do Teorema 3.5.5, que

$$\bar{J}[u] \geq \frac{1}{2} \frac{(2^l - 1)^2}{2^{2m(\frac{l}{m} + 1)}} \left(\frac{m}{l + m} \right)^{2m} = c_2 > 0, \quad (3.5.46)$$

para $u \in \mathcal{A}_0^\infty$, tal que $|B_2| < \frac{1}{2}$.

Assim, de (3.5.43) e (3.5.46), para l ímpar,

$$\inf_{u \in \mathcal{A}_0^\infty} \bar{J}[u] \geq c > 0. \quad (3.5.47)$$

Se l é par, então $|u(s, t)| = |u(s, t) - u(s, 0)| \leq Lt$ e, consequentemente,

$$|u(s, t)| - \frac{1}{2}t^{\frac{k}{l}} < 0, \quad \forall (s, t) \in [0, 1] \times]0, \underline{t}].$$

Neste caso, substituindo u por $|u|$ em (3.5.38), (3.5.39), (3.5.44) e (3.5.45) a demonstração é análoga ao caso anterior. Assim, para l par também se verifica (3.5.47). ■

No que se segue, mediante um raciocínio semelhante ao que foi feito em [22] para dimensão um, estuda-se o comportamento de um problema variacional sem condições de fronteira face ao fenómeno de Lavrentiev. Seja $\Omega_1 =]0, 1[\times]-1, 1[$. Reflectindo sobre o eixo O_s o exemplo apresentado no Teorema 3.5.14 obtém-se um problema variacional sem condições de fronteira e que exhibe fenómeno de Lavrentiev.

Teorema 3.5.15. *Sejam l, k, m constantes inteiras positivas nas condições do Teorema 3.5.5, e considere-se o problema variacional*

$$\bar{\bar{J}}[u] = \int_{\Omega_1} (u^l(s, t) - t^k)^2 (|\nabla u(s, t)|^{2m} + 1) ds dt \longrightarrow \inf. \quad (3.5.48)$$

Se l e k são ambos ímpares, então o problema variacional (3.5.48) exhibe $W^{1,p} - W^{1,\infty}$ Lavrentiev gap para $p \in \left[1, \frac{1}{1-\frac{k}{l}}\right[$. Nos restantes casos $\bar{\bar{J}}$ não exhibe Lavrentiev gap.

Demonstração Consideram-se três casos possíveis, consoante a paridade de k e l . Assim:

- Suponhamos que k é par.

Uma vez que $\bar{\bar{J}}\left[|t|^{\frac{k}{l}}\right] = 0$, vem

$$\inf_{u \in W^{1,p}(\Omega_1)} \bar{\bar{J}}[u] = 0,$$

$$\text{para } p \in \left[1, \frac{1}{1-\frac{k}{l}}\right].$$

Considere-se a sucessão $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset W^{1,\infty}(\Omega_1)$ definida por

$$u_n(s, t) = \begin{cases} |t|^{\frac{k}{l}} & , \quad -1 \leq t \leq -\frac{1}{n}, s \in [0, 1] \\ \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{k}{l}} & , \quad -\frac{1}{n} \leq t \leq \frac{1}{n}, s \in [0, 1] \\ t^{\frac{k}{l}} & , \quad \frac{1}{n} \leq t \leq 1, s \in [0, 1] \end{cases}.$$

Por simples cálculos obtém-se

$$\bar{\bar{J}}[u_n] = \frac{1}{n^{2k+1}} \left(2 + \frac{2}{2k+1} - \frac{4}{k+1} \right)$$

e, conseqüentemente,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \bar{\bar{J}}[u_n] = 0,$$

o que permite concluir que

$$\inf_{u \in W^{1,p}(\Omega_1)} \bar{\bar{J}}[u] = \inf_{u \in W^{1,\infty}(\Omega_1)} \bar{\bar{J}}[u] = 0.$$

Assim, para k par não há fenómeno.

- Suponhamos agora que k é ímpar e l par.

Neste caso, para todo $u \in W^{1,p}(\Omega_1)$ e $p \in [1, \infty]$, vem

$$\begin{aligned} \bar{\bar{J}}[u] &= \int_{\Omega_1} (u^l(s, t) - t^k)^2 (|\nabla u(s, t)|^{2m} + 1) ds dt \\ &\geq \int_{]0,1[\times]-1,0[} (u^l(s, t) - t^k)^2 (|\nabla u(s, t)|^{2m} + 1) ds dt, \end{aligned}$$

e uma vez que

$$(u^l(s, t) - t^k)^2 = u^{2l} + t^{2k} - 2t^k u^l \geq t^{2k}, \quad \forall (s, t) \in]0, 1[\times] -1, 0[,$$

para todo $p \in [1, +\infty]$ vem

$$\bar{\bar{J}}[u] \geq \int_{]0,1[\times]-1,0[} t^{2k} ds dt = \frac{1}{2k+1}, \quad \forall u \in W^{1,p}(\Omega_1). \quad (3.5.49)$$

Por outro lado, considerando a sucessão $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset W^{1,\infty}(\Omega_1)$ definida por

$$u_n(s, t) = \begin{cases} 0 & , \quad -1 \leq t \leq -\frac{1}{n}, s \in [0, 1] \\ t + \frac{1}{n} & , \quad -\frac{1}{n} \leq t \leq 0, s \in [0, 1] \\ \frac{1}{n} & , \quad 0 \leq t \leq \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{l}{k}}, s \in [0, 1] \\ t^{\frac{k}{l}} & , \quad \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{l}{k}} \leq t \leq 1, s \in [0, 1] \end{cases},$$

vem

$$\begin{aligned} \bar{\bar{J}}[u_n] &= \frac{1}{2k+1} \left(1 - \frac{1}{n^{2k+1}}\right) + \frac{2}{n^{2l+1}(2l+1)} + \frac{2}{n^{2k+1}(2k+1)} - \\ &\quad - \frac{4k!}{n^{l+k+1}(l+1) \cdots (l+k+1)} + \frac{1}{n^{2l+\frac{l}{k}}} + \frac{1}{n^{\frac{l}{k}(2k+1)}(2k+1)} - \frac{2}{n^{l+\frac{l}{k}(k+1)}} \end{aligned}$$

e, conseqüentemente,

$$\lim \bar{\bar{J}}[u_n] = \frac{1}{2k+1}. \quad (3.5.50)$$

Assim, de (3.5.49)-(3.5.50) conclui-se que

$$\inf_{u \in W^{1,p}(\Omega_1)} \bar{\bar{J}}[u] = \frac{1}{2k+1}, \quad \forall p \in [1, +\infty].$$

- Considere-se agora k e l ímpares.

Uma vez que $\bar{\bar{J}}\left[t^{\frac{k}{l}}\right] = 0$ e $\bar{\bar{J}}$ é não negativo, conclui-se que

$$\inf_{u \in W^{1,p}(\Omega_1)} \bar{\bar{J}}[u] = 0,$$

para $p \in \left[1, \frac{1}{1-\frac{k}{l}}\right[$.

Considere-se $u \in W^{1,\infty}(\Omega_1)$ e os conjuntos

$$D_1 = \{s \in [0, 1] : u(s, 0) \geq 0\}$$

e

$$D_2 = \{s \in [0, 1] : u(s, 0) \leq 0\}.$$

Ambos os conjuntos são fechados em $[0, 1]$ e $|D_2| \geq \frac{1}{2}$ ou $|D_1| \geq \frac{1}{2}$.

No caso de $|D_2| \geq \frac{1}{2}$, faça-se $D = D_2$ em (3.5.38) e (3.5.39).

Então,

$$\begin{aligned} \bar{\bar{J}}[u] &= \int_{\Omega_1} (u^l(s, t) - t^k)^2 (|\nabla u(s, t)|^{2m} + 1) ds dt \\ &\geq \int_{D_2 \times]0, 1[} (u^l(s, t) - t^k)^2 (|\nabla u(s, t)|^{2m} + 1) ds dt. \end{aligned}$$

Do facto de u ser lipschitziana, para $(s, t) \in D_2 \times [0, 1]$, resulta

$$u(s, t) \leq u(s, t) - u(s, 0) \leq |u(s, t) - u(s, 0)| \leq Lt.$$

Escolhendo $\underline{t} \in]0, 1]$ tal que $L\underline{t}^{1-\frac{k}{l}} < \frac{1}{4}$ vem

$$u(s, t) - \frac{1}{2}t^{\frac{k}{l}} < 0, \forall (s, t) \in D_2 \times]0, \underline{t}],$$

e a demonstração deste caso é análoga à demonstração do Teorema 3.5.14 em $D_2 \times]0, 1[$, tendo presente que $|B_1| + |B_2| \geq \frac{1}{2}$, donde se conclui que $|B_1| \geq \frac{1}{4}$ ou $|B_2| \geq \frac{1}{4}$.

Se $|D_2| < \frac{1}{2}$, então $|D_1| \geq \frac{1}{2}$.

Uma vez que

$$\bar{\bar{J}}[u] = \int_{\Omega_1} ((-u)^l(s, t) - (-t)^k)^2 (|\nabla(-u)(s, t)|^{2m} + 1) ds dt$$

fazendo uma mudança de variável $t \mapsto -t$, vem

$$\bar{\bar{J}}[u] = \int_{\Omega_1} ((-u)^l(s, -t) - t^k)^2 (|\nabla(-u)(s, -t)|^{2m} + 1) ds dt.$$

Como para todo o $s \in D_1$, $-u(s, -0) \leq 0$, este caso reduz-se ao caso anterior.

Desta forma,

$$\bar{\bar{J}}[u] \geq c_0 > 0, \forall u \in W^{1,\infty}(\Omega_1)$$

e, consequentemente,

$$\inf_{u \in W^{1,\infty}(\Omega_1)} \bar{\bar{J}}[u] \geq c_0, \quad (3.5.51)$$

donde se conclui que, com k e l ímpares, $\bar{\bar{J}}$ exhibe fenómeno. ■

Prova-se, de modo análogo ao que foi feito no caso em que havia condições de fronteira, que o fenómeno persiste a certas perturbações aditivas. Assim:

Teorema 3.5.16. *Sejam l, k, m, r constantes nas condições do Teorema 3.5.9, e considere-se l e k ímpares. Então, existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que para todo o $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ o problema variacional*

$$\bar{\bar{J}}_\varepsilon[u] = \int_{\Omega_1} (u^l(s, t) - t^k)^2 (|\nabla u(s, t)|^{2m} + 1) + \varepsilon |\nabla u|^r ds dt \longrightarrow \inf \quad (3.5.52)$$

exibe $W^{1,p} - W^{1,\infty}$ Lavrentiev gap para todo o $p \in \left[1, \frac{1}{1-\frac{k}{l}}\right]$.

Demonstração A demonstração é análoga à do Teorema 3.5.9. ■

Como já foi referido, a diferença significativa entre o que se passa em dimensão um e em dimensão dois está na prova da mensurabilidade de conjuntos, que no caso unidimensional são intervalos. Com a técnica usada para ultrapassar o problema em dimensão dois provam-se resultados semelhantes para problemas variacionais em dimensão superior a dois, obtendo-se assim a extensão do exemplo de Manià a dimensão superior ou igual a dois.

No exemplo apresentado nesta secção o Lagrangiano depende explicitamente apenas de uma variável independente. No que se segue apresentam-se Lagrangianos que dependem explicitamente das duas variáveis independentes, e prova-se que tudo o que foi feito nesta secção é possível ser feito para a classe de funcionais correspondente.

3.6 Exemplo em 2D com duas variáveis independentes

Seja φ uma função tal que

$$\varphi \in C^1([0, 1]), \varphi(s) \geq 1, \forall s \in [0, 1]. \quad (3.6.53)$$

Considere-se o funcional

$$J[u] = \int_{\Omega} \left(u^l(s, t) - (t\varphi(s))^k \right)^2 |\nabla u(s, t)|^{2m} ds dt$$

onde $\Omega =]0, 1[\times]0, 1[$ e $m, l \in \mathbb{N}$, $k > 0$ com $l > k$. Pretende-se verificar o que se passa com

$$\inf_{u \in \mathcal{A}_{\varphi}^p} J[u],$$

para $1 \leq p \leq \infty$ e

$$\mathcal{A}_{\varphi}^p = \left\{ u \in W^{1,p}(\Omega) : u(s, 0) = 0 \wedge u(s, 1) = (\varphi(s))^{\frac{k}{l}} \right\}.$$

Para $v(s, t) = (t\varphi(s))^{\frac{k}{l}}$ vem $J[v] = 0$ e $v \in \mathcal{A}_{\varphi}^p$ para $1 \leq p < \frac{1}{1-\frac{k}{l}}$. Uma vez que $J[u] \geq 0$ para todo $u \in \mathcal{A}_{\varphi}^p$ e para todo o $1 \leq p \leq \infty$ vem

$$\inf_{u \in \mathcal{A}_{\varphi}^p} J[u] = 0$$

para $1 \leq p < \frac{1}{1 - \frac{k}{l}}$.

Dado $u \in \mathcal{A}_\varphi^\infty$ pretende-se determinar

$$\inf_{u \in \mathcal{A}_\varphi^\infty} J[u].$$

Usando um raciocínio análogo ao usado na Secção 3.5 prova-se que

$$\inf_{u \in \mathcal{A}_\varphi^\infty} J[u] > 0.$$

Apresentam-se algumas passagens da demonstração, principalmente aquelas onde há diferenças. Assim

Lema 3.6.1. *Sejam $u \in A_\varphi^\infty$ e l, k constantes positivas. A função*

$$\beta_\varphi(s) = \inf \left\{ t \in]0, 1] : u(s, t) = \frac{1}{2}(t\varphi(s))^{\frac{k}{l}} \right\}, \quad s \in [0, 1]$$

é semicontínua inferiormente.

Demonstração Dado $u \in \mathcal{A}_\varphi^\infty$ para $(s, t) \in \Omega$

$$\begin{aligned} u(s, t) &\leq |u(s, t) - u(s, 0)| \\ &\leq Lt, \end{aligned} \tag{3.6.54}$$

com L a constante de Lipschitz.

Considere-se a superfície auxiliar de equação $\frac{1}{2}(t\varphi(s))^{\frac{k}{l}}$. Atendendo a (3.6.54), para $\forall (s, t) \in [0, 1] \times [0, 1]$ vem

$$\begin{aligned} u(s, t) - \frac{1}{2}(t\varphi(s))^{\frac{k}{l}} &\leq Lt - \frac{1}{2}(t\varphi(s))^{\frac{k}{l}} \\ &= \left(Lt^{1-\frac{k}{l}} - \frac{1}{2}(\varphi(s))^{\frac{k}{l}} \right) t^{\frac{k}{l}}. \end{aligned} \tag{3.6.55}$$

Escolha-se $\underline{t} \in]0, 1]$ tal que $L\underline{t}^{1-\frac{k}{l}} < \frac{1}{4}$. Como $\varphi(s) \geq 1, \forall s \in [0, 1]$, de (3.6.55) vem

$$u(s, t) - \frac{1}{2}(t\varphi(s))^{\frac{k}{l}} < 0, \quad (s, t) \in [0, 1] \times]0, \underline{t}]. \tag{3.6.56}$$

Por outro lado, como u é contínua e $u(s, 1) = (\varphi(s))^{\frac{k}{t}} > \frac{1}{2}(\varphi(s))^{\frac{k}{t}}$ para $s \in]0, 1[$, existe t tal que $u(s, t) = \frac{1}{2}(t\varphi(s))^{\frac{k}{t}}$, o que permite concluir que a função β_φ está bem definida.

Seja $s_0 \in [0, 1]$ e $\beta_\varphi(s_0) = t_0$. Por (3.6.56) conclui-se que $\beta_\varphi(s_0) > \underline{t}$ e, da definição de β ,

$$u(s_0, \beta_\varphi(s_0)) = \frac{1}{2}(\beta_\varphi(s_0)\varphi(s_0))^{\frac{k}{t}},$$

e

$$u(s_0, t) \neq \frac{1}{2}(t\varphi(s_0))^{\frac{k}{t}}$$

para $t \in]0, t_0[$.

Por outro lado, como para $t \in]0, \underline{t}]$ se verifica $u(s_0, t) < \frac{1}{2}(t\varphi(s_0))^{\frac{k}{t}}$, conclui-se que

$$u(s_0, t) < \frac{1}{2}(t\varphi(s_0))^{\frac{k}{t}},$$

para $t \in]0, t_0[$.

Seja $\delta > 0$.

Considere-se o caso em que δ é tal que $t_0 - \delta \geq \underline{t}$. Da definição de β_φ

$$u(s_0, t) - \frac{1}{2}(t\varphi(s_0))^{\frac{k}{t}} < 0, \forall t \in [\underline{t}, t_0 - \delta]. \quad (3.6.57)$$

Da continuidade da função que está no 1º membro de (3.6.57) resulta que

$$\max_{t \in [\underline{t}, t_0 - \delta]} \left(u(s_0, t) - \frac{1}{2}(t\varphi(s_0))^{\frac{k}{t}} \right) = \mu < 0. \quad (3.6.58)$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \max_{t \in [\underline{t}, t_0 - \delta]} \left(u(s, t) - \frac{1}{2}(t\varphi(s))^{\frac{k}{t}} \right) &\leq \max_{t \in [\underline{t}, t_0 - \delta]} (u(s, t) - u(s_0, t)) \\ &\quad + \max_{t \in [\underline{t}, t_0 - \delta]} \left(u(s_0, t) - \frac{1}{2}(t\varphi(s_0))^{\frac{k}{t}} \right) \\ &\quad + \max_{t \in [\underline{t}, t_0 - \delta]} \left(\frac{1}{2}(t\varphi(s_0))^{\frac{k}{t}} - \frac{1}{2}(t\varphi(s))^{\frac{k}{t}} \right). \end{aligned} \quad (3.6.59)$$

Do facto de u ser lipschitziana, para $|s - s_0| < \frac{-\mu}{2L}$ resulta

$$\max_{t \in [\underline{t}, t_0 - \delta]} (u(s, t) - u(s_0, t)) \leq L|s - s_0| < \frac{-\mu}{2}. \quad (3.6.60)$$

Como a função φ é contínua e $\varphi(s) \geq 1 \forall s \in [0, 1]$, $\varphi^{\frac{k}{t}}$ também é contínua e, por conseguinte, existe $\varepsilon_1 > 0$ tal que para $s \in [0, 1]$ e $|s - s_0| < \varepsilon_1$ vem $\varphi^{\frac{k}{t}}(s_0) - \varphi^{\frac{k}{t}}(s) < -\mu$, donde resulta

$$\frac{1}{2}(t\varphi(s_0))^{\frac{k}{t}} - \frac{1}{2}(t\varphi(s))^{\frac{k}{t}} = \frac{1}{2}t^{\frac{k}{t}} \left((\varphi(s_0))^{\frac{k}{t}} - (\varphi(s))^{\frac{k}{t}} \right) < \frac{-\mu}{2}. \quad (3.6.61)$$

De (3.6.58)-(3.6.61) conclui-se que, para $s \in [0, 1]$ que verifique $|s - s_0| < \varepsilon$ com $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \frac{-\mu}{2L}\}$ se tem

$$\max_{t \in [\underline{t}, t_0 - \delta]} \left(u(s, t) - \frac{1}{2}(t\varphi(s))^{\frac{k}{t}} \right) < 0.$$

Assim, existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$u(s, t) - \frac{1}{2}(t\varphi(s))^{\frac{k}{t}} < 0,$$

para (s, t) com $s \in [0, 1]$ tal que $|s - s_0| < \varepsilon$ e $t \in [\underline{t}, t_0 - \delta]$.

Da definição de β_φ resulta que $\beta_\varphi(s) > t_0 - \delta = \beta_\varphi(s_0) - \delta$, donde é possível concluir que

$$\forall \delta > 0, \exists \varepsilon > 0 : \forall s \in [0, 1] : |s - s_0| < \varepsilon, \beta_\varphi(s) > \beta_\varphi(s_0) - \delta.$$

No caso de $t_0 - \delta < \underline{t}$, como $]0, t_0 - \delta] \subset]0, \underline{t}]$ vem

$$u(s, t) < \frac{1}{2}(t\varphi(s))^{\frac{k}{t}}$$

donde se conclui que $\beta_\varphi(s) > \beta_\varphi(s_0) - \delta$ para todo $s \in [0, 1]$.

Assim, β_φ é semicontínua inferiormente em s_0 e, como s_0 é qualquer em $[0, 1]$, β_φ é semicontínua inferiormente. ■

Lema 3.6.2. *Seja $u \in A_\varphi^\infty$. A função*

$$\alpha_\varphi(s) = \sup \{ t \in [0, \beta_\varphi(s)[: u(s, t) = 0 \}, \quad s \in [0, 1]$$

é uma função mensurável.

Demonstração A demonstração é análoga à do Lema 3.5.3. ■

Atendendo aos Lemas 3.6.1 e 3.6.2 prova-se, de modo análogo ao feito no Lema 3.5.4, que o conjunto

$$A_\varphi = \{(s, t) : s \in [0, 1] \wedge \alpha_\varphi(s) \leq t \leq \beta_\varphi(s)\}$$

é mensurável.

Teorema 3.6.3. *Sejam l, k, m constantes positivas satisfazendo*

$$l > k, \quad 2m \geq \frac{2k+1}{l-k}l, \quad l, m \in \mathbb{N}$$

e φ uma função que satisfaz (3.6.53). Nestas condições o problema variacional

$$J_\varphi[u] = \int_{\Omega} (u^l - (t\varphi(s)^k))^2 |\nabla u(s, t)|^{2m} ds dt \longrightarrow \inf, \quad u(s, 0) = 0, \quad u(s, 1) = \varphi^{\frac{k}{l}}(s)$$

exibe $W^{1,p} - W^{1,\infty}$ Lavrentiev gap para $1 \leq p < \frac{1}{1 - \frac{k}{l}}$.

Demonstração Como

$$\begin{aligned} J_\varphi[u] &= \int_{\Omega} (u^l(s, t) - (t\varphi(s)^k))^2 |\nabla u(s, t)|^{2m} ds dt \\ &\geq \int_{A_\varphi} (u^l - (t\varphi(s)^k))^2 |\nabla u(s, t)|^{2m} dt ds, \end{aligned}$$

e para $(s, t) \in A_\varphi$ vem

$$(u^l(s, t) - (t\varphi(s)^k))^2 \geq (2^l - 1)^2 u^{2l}(s, t), \quad (3.6.62)$$

conclui-se que

$$J_\varphi[u] \geq (2^l - 1)^2 \int_{A_\varphi} u^{2l}(s, t) |\nabla u(s, t)|^{2m} ds dt.$$

Usando o Teorema de Fubini, a desigualdade de Jensen, o Lema de integração parcial e o facto de

$$\begin{aligned} \left(\int_{\alpha_\varphi(s)}^{\beta_\varphi(s)} \left(u^{\frac{l}{m}+1} \right)_t(s, t) dt \right)^{2m} &= \left(\frac{1}{2} \right)^{2m(\frac{l}{m}+1)} (\beta_\varphi \varphi(s))^{2m\frac{k}{l}(\frac{l}{m}+1)}(s) \\ &\geq \left(\frac{1}{2} \right)^{2m(\frac{l}{m}+1)} \beta^{2m\frac{k}{l}(\frac{l}{m}+1)}(s), \quad \text{q. t. } s \in [0, 1], \end{aligned}$$

prova-se, de modo análogo ao Teorema 3.5.5, que

$$J[u] \geq \frac{(2^l - 1)^2}{2^{2m(\frac{l}{m}+1)}} \left(\frac{m}{l+m} \right)^{2m},$$

para todo o $u \in \mathcal{A}^\infty$.

Consequentemente,

$$\inf_{u \in \mathcal{A}_\varphi^\infty} J[u] \geq \frac{(2^l - 1)^2}{2^{2m(\frac{l}{m}+1)}} \left(\frac{m}{l+m} \right)^{2m} > 0.$$

■

Nota 3.6.4. Se $2m < \frac{2k+1}{l-k}l$ o funcional J_φ não exibe o fenómeno de Lavrentiev, uma vez que a sucessão $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definida por

$$u_n(s, t) = \begin{cases} n^{(1-\frac{k}{l})} \varphi^{\frac{k}{l}}(s) t & , \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{n}, s \in [0, 1] \\ (\varphi(s) t)^{\frac{k}{l}} & , \quad \frac{1}{n} \leq t \leq 1, s \in [0, 1] \end{cases}$$

é tal que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}_\varphi^\infty$ e $\lim_{n \rightarrow +\infty} J[u_n] = 0$

Prova-se, de modo análogo ao que se fez na secção anterior, que o fenómeno persiste a certas perturbações aditivas, obtendo-se uma classe de funcionais regulares que exibem fenómeno de Lavrentiev.

Teorema 3.6.5. *Considere-se k, l, m e r nas condições do Teorema 3.5.11. Então, existe ε_0 tal que para todo o ε que verifique $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, o problema variacional regular*

$$J_{\varphi\varepsilon}[u] = \int_{\Omega} (u^l(s, t) - (t\varphi(s))^k)^2 |\nabla u(s, t)|^{2m} + \varepsilon |\nabla u(s, t)|^r ds dt, \longrightarrow \inf, \quad u \in \mathcal{A}_\varphi^p \quad (3.6.63)$$

exibe $W^{1,p} - W^{1,\infty}$ Lavrentiev gap para $p \in \left[1, \frac{1}{1-\frac{k}{l}}\right]$.

Demonstração Análoga à demonstração do Teorema 3.5.9. ■

Teorema 3.6.6. *Sejam l, k, m constantes positivas nas condições do Teorema 3.6.3 e o funcional*

$$\bar{J}_\varphi[u] = \int_{\Omega_1} (u^l(s, t) - (\varphi(s)t)^k)^2 (|\nabla u(s, t)|^{2m} + 1) ds dt \longrightarrow \inf. \quad (3.6.64)$$

Se l e k são ímpares, então o problema variacional (3.6.64) exibe $W^{1,p} - W^{1,\infty}$ Lavrentiev gap para $p \in \left[1, \frac{1}{1 - \frac{k}{l}}\right]$. Nos restantes casos não há fenómeno.

Demonstração A demonstração no caso de k e l serem ímpares é análoga à demonstração do Teorema 3.5.15, bem como nos restantes casos, considerando as sucessões:

$$u_n(s, t) = \begin{cases} (|t|\varphi(s))^{\frac{k}{l}} & \text{se } -1 \leq t \leq -\frac{1}{n}, s \in [0, 1] \\ (\frac{1}{n}\varphi(s))^{\frac{k}{l}} & \text{se } -\frac{1}{n} \leq t \leq \frac{1}{n}, s \in [0, 1] \\ (\varphi(s)t)^{\frac{k}{l}} & \text{se } \frac{1}{n} \leq t \leq 1, s \in [0, 1] \end{cases},$$

no caso de k ser par e

$$u_n(s, t) = \begin{cases} 0 & \text{se } -1 \leq t \leq -\frac{1}{n}, s \in [0, 1] \\ (t + \frac{1}{n}) \varphi^{\frac{k}{l}}(s) & \text{se } -\frac{1}{n} \leq t \leq 0, s \in [0, 1] \\ \frac{1}{n} \varphi^{\frac{k}{l}}(s) & \text{se } 0 \leq t \leq (\frac{1}{n})^{\frac{l}{k}}, s \in [0, 1] \\ (\varphi(s)t)^{\frac{k}{l}} & \text{se } (\frac{1}{n})^{\frac{l}{k}} \leq t \leq 1, s \in [0, 1] \end{cases}$$

no caso de k se ímpar e l ser par. ■

Capítulo 4

Fenómeno de Lavrentiev em domínios não rectangulares

4.1 Introdução

Nas Secções 3.5 e 3.6 construíram-se classes de funcionais em 2D, definidos num domínio rectangular, e para os quais os problemas variacionais correspondentes exibem fenómeno de Lavrentiev. Obteve-se, assim, uma extensão a 2D do exemplo de Manià com diferentes condições de fronteira. No que se segue, usando uma técnica semelhante à usada nessas secções, prova-se que os problemas variacionais aí apresentados continuam a exhibir fenómeno quando se consideram alguns domínios não rectangulares. Apresentam-se exemplos de problemas variacionais definidos em domínios cuja fronteira é fractal e que exibem fenómeno de Lavrentiev. Por fim, prova-se que dado um domínio limitado e aberto de \mathbb{R}^2 existe sempre um problema variacional aí definido que exhibe fenómeno de Lavrentiev.

4.2 Problema com condições de fronteira

Sejam m_1, m_2, M_1, M_2 constantes tais que $0 < m_2 < M_2$ e $m_1 < M_1 < 0$, $I =]0, 1[$ e Ω um domínio limitado e aberto de \mathbb{R}^2 , tal que:

- $I \times]M_1, m_2[\subset \Omega$;
- $I \times]m_1, M_2[\supset \Omega$;
- $\{(0, t) : M_1 \leq t \leq m_2\} \cup \{(1, t) : M_1 \leq t \leq m_2\} \subset \partial\Omega$;
- dado $u \in W^{1,p}[\Omega]$ é possível estender u por continuidade à fronteira de Ω (ou, pelo menos, à parte de $\partial\Omega$ que interessa).

No que se segue representam-se por $\partial_1\Omega$ e por $\partial_2\Omega$, respectivamente, as partes da fronteira que limitam Ω inferiormente e superiormente.

Considere-se l e k ímpares, com $k < l$, $m > 0$, o funcional

$$J[u] = \int_{\Omega} (u^l(s, t) - t^k)^2 |\nabla u(s, t)|^{2m} ds dt \quad (4.2.1)$$

e

$$\mathcal{A}_f^p = \{u \in W^{1,p}[\Omega] \cap \overline{C}(\Omega) : u(s, t) = t^{\frac{k}{l}}, (s, t) \in \partial_1\Omega \cup \partial_2\Omega\}, \quad (4.2.2)$$

com $p \in [1, +\infty]$.

Exemplo 4.2.1.

$$\Omega = \{(s, t) \in \mathbb{R}^2 : s \in]0, 1[\wedge \theta_1(s) < t < \theta_2(s)\}$$

com θ_1, θ_2 duas funções lipschitzianas em $[0, 1]$, com $\theta_1(s) < 0 < \theta_2(s)$, $\forall s \in I$, $\theta_1([0, 1]) = [m_1, M_1]$ e $\theta_2([0, 1]) = [m_2, M_2]$ e tais que o domínio Ω é de Lipschitz.

Qualquer um dos domínios fractais apresentados na Secção 1.2.3 pode ser apresentado como exemplo.

Seja $u_0(s, t) = t^{\frac{k}{l}}$. Assim definida, $u_0 \in \mathcal{A}_f^p$ para $p \in \left[1, \frac{1}{1 - \frac{k}{l}}\right]$ e $J[u_0] = 0$. Como u_0 é contínua em \mathbb{R}^2 , as condições de fronteira de u_0 são a restrição de u_0 a $\partial\Omega$.

Como já foi referido no Capítulo 3,

$$\inf_{u \in \mathcal{A}_f^p} J[u] = 0$$

$$\text{para } p \in \left[1, \frac{1}{1 - \frac{k}{l}}\right].$$

Para m tal que $2m < \frac{2k+1}{l-k}l$ considere-se a sucessão $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definida por

$$u_n(s, t) = \begin{cases} t^{\frac{k}{l}} & , \quad (s, t) \in \Omega \text{ com } t \leq -\frac{1}{n+n_0} \\ (n+n_0)^{(1-\frac{k}{l})} t & , \quad (s, t) \in \Omega \text{ com } -\frac{1}{n+n_0} \leq t \leq \frac{1}{n+n_0} \\ t^{\frac{k}{l}} & , \quad (s, t) \in \Omega \text{ com } t \geq \frac{1}{n+n_0} \end{cases}$$

com $n_0 = \max\{n_1 - 1, n_2 - 1\}$ e n_1 e n_2 dois números naturais que verificam $\frac{1}{n} < m_2$ para $n \geq n_2$ e $-\frac{1}{n} > M_1$ para $n \geq n_1$. Assim definida, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}_f^\infty$ e, por aplicação do Teorema de Fubini, obtém-se

$$\begin{aligned} J[u_n] &= \int_0^1 \left(\int_{-\frac{1}{n+n_0}}^{\frac{1}{n+n_0}} ((n+n_0)^{l-k} t^l - t^k)^2 (n+n_0)^{2m(1-\frac{k}{l})} dt \right) ds \\ &= (n+n_0)^{2m(1-\frac{k}{l})-2k-1} \left(\frac{2}{2l+1} + \frac{2}{2k+1} - \frac{4}{l+k+1} \right). \end{aligned}$$

Como $2m < \frac{2k+1}{l-k}l$, vem $2m(1 - \frac{k}{l}) - 2k - 1 < 0$ e, por conseguinte, $\lim_{n \rightarrow +\infty} J[u_n] = 0$, o que permite concluir que

$$\inf_{u \in \mathcal{A}_f^\infty} J[u] = 0.$$

Sendo assim, o funcional J não exhibe fenómeno de Lavrentiev para os valores de m considerados.

Pretende-se provar que $\inf_{u \in \mathcal{A}^\infty} J[u]$ é estritamente positivo quando $2m \geq \frac{2k+1}{l-k}l$. Começa-se por provar resultados auxiliares que serão necessários para o que se segue.

Dado $u \in \mathcal{A}_f^\infty$, vem $u(s, t) = t^{\frac{k}{l}} < 0$, para $(s, t) \in \partial_1 \Omega$ e $u(s, t) = t^{\frac{k}{l}} > 0$ para $(s, t) \in \partial_2 \Omega$. Assim, da continuidade de u conclui-se que para cada $s_0 \in I$ existe t_0 tal que $(s_0, t_0) \in \Omega$ e $u(s_0, t_0) = 0$.

Seja $u \in \mathcal{A}_f^\infty$. Os conjuntos

$$D_1 = \{s \in I : u(s, 0) \leq 0\} \quad (4.2.3)$$

e

$$D_2 = \{s \in I : u(s, 0) \geq 0\}. \quad (4.2.4)$$

são fechados em I e $|D_1| \geq \frac{1}{2}$ ou $|D_2| \geq \frac{1}{2}$.

No que se segue há necessidade de trabalhar em diferentes subconjuntos de Ω , consoante $s \in D_1$ ou $s \in D_2$. Sendo assim, estuda-se separadamente o que se passa nos casos em que $|D_1| \geq \frac{1}{2}$ e $|D_2| \geq \frac{1}{2}$. Começa-se por trabalhar com o caso em que $|D_1| \geq \frac{1}{2}$.

4.2.1 Mensurabilidade do conjunto no caso em que $|D_1| \geq \frac{1}{2}$

Nesta subsecção trabalha-se na parte do domínio

$$\Omega_1 = \{(s, t) \in \Omega : s \in D_1 \wedge t \geq 0\}.$$

Lema 4.2.2. *Sejam $u \in \mathcal{A}_f^\infty$ e l e k ímpares com $k < l$. A função β_1 , definida por*

$$\beta_1(s) = \inf \left\{ t > 0 : (s, t) \in \Omega_1, \ u(s, t) = \frac{1}{2} t^{\frac{k}{l}} \right\}, \ s \in D_1, \quad (4.2.5)$$

é semicontínua inferiormente.

Demonstração Sejam $u \in \mathcal{A}_f^\infty$ e $s \in D_1$. Uma vez que u é lipschitziana e $u(s, 0) \leq 0$ para $s \in D_1$, conclui-se que, para alguma constante L ,

$$u(s, t) \leq |u(s, t) - u(s, 0)| \leq Lt, \quad (4.2.6)$$

para todo $(s, t) \in \Omega_1$. Seja $\underline{t} > 0$ tal que

$$L\underline{t}^{1-\frac{k}{l}} \leq \frac{1}{2\left(\frac{m_2-m_1}{m_2}\right)^{\frac{l-k}{l}}} < \frac{1}{2}. \quad (4.2.7)$$

Note-se que \underline{t} assim definido é tal que $(s, \underline{t}) \in \Omega_1$, $\forall s \in D_1$.

De facto, para $s_0 \in I$ considere-se

$$t_1 = \max \{t : (s_0, t) \in \partial_1 \Omega\} \text{ e } t_2 = \min \{t : (s_0, t) \in \partial_2 \Omega\}. \quad (4.2.8)$$

Como $u \in \mathcal{A}_f^\infty$, $u(s_0, t_i) = t_i^{\frac{k}{l}}$ para $i = 1, 2$ e u é lipschitziana, vem

$$|u(s_0, t_2) - u(s_0, t_1)| \leq L|t_2 - t_1|$$

ou

$$t_2^{\frac{k}{l}} - t_1^{\frac{k}{l}} \leq L(t_2 - t_1).$$

Atendendo ao facto de $0 < \frac{k}{l} < 1$ e l e k serem ímpares vem $(t_2 - t_1)^{\frac{k}{l}} < t_2^{\frac{k}{l}} - t_1^{\frac{k}{l}}$ e, consequentemente,

$$\frac{1}{L} \leq (t_2 - t_1)^{\frac{l-k}{l}},$$

donde resulta

$$\frac{1}{2\left(\frac{m_2-m_1}{m_2}\right)^{\frac{l-k}{l}} L} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{t_2 - t_1}{\frac{m_2-m_1}{m_2}} \right)^{\frac{l-k}{l}},$$

ou ainda,

$$\left(\frac{1}{2\left(\frac{m_2-m_1}{m_2}\right)^{\frac{l-k}{l}} L} \right)^{\frac{l}{l-k}} \leq \frac{m_2}{2^{\frac{l}{l-k}}(m_2 - m_1)}(t_2 - t_1). \quad (4.2.9)$$

Uma vez que $m_i \leq t_i \leq M_i$, $i = 1, 2$ e a função $g(x) = \frac{x}{x - m_1}$ é crescente vem

$$\frac{t_2}{t_2 - t_1} \geq \frac{m_2}{m_2 - m_1}. \quad (4.2.10)$$

De (4.2.7), (4.2.9) e (4.2.10) conclui-se que

$$\underline{t} \leq \left(\frac{1}{2 \left(\frac{m_2 - m_1}{m_2} \right)^{\frac{l-k}{l}} L} \right)^{\frac{l}{l-k}} \leq \frac{1}{2^{\frac{l}{l-k}}} \frac{t_2}{(t_2 - t_1)} (t_2 - t_1) = \frac{1}{2^{\frac{l}{l-k}}} t_2 < t_2.$$

Nestas condições, $0 < \underline{t} < t_2 \leq t$ para todo o t tal que $(s_0, t) \in \partial_2 \Omega$. Assim, $(s, \underline{t}) \in \Omega_1$, $\forall s \in D_1$.

Além disso, para $0 \leq t \leq \underline{t}$ vem $Lt^{1-\frac{k}{l}} < \frac{1}{2}$. De (4.2.6) para $(s, t) \in D_1 \times]0, \underline{t}]$ obtém-se

$$u(s, t) - \frac{1}{2} t^{\frac{k}{l}} \leq Lt - \frac{1}{2} t^{\frac{k}{l}} = \left(Lt^{1-\frac{k}{l}} - \frac{1}{2} \right) t^{\frac{k}{l}},$$

donde se conclui que

$$u(s, t) < \frac{1}{2} t^{\frac{k}{l}}, \forall (s, t) \in D_1 \times]0, \underline{t}]. \quad (4.2.11)$$

Como para cada $s \in D_1$, $u(s, 0) \leq 0$, $u(s, t) = t^{\frac{k}{l}} > \frac{1}{2} t^{\frac{k}{l}}$ para $(s, t) \in \partial_2 \Omega$ e a função u é contínua, a função β_1 definida em (4.2.5) está bem definida.

Seja $s_0 \in D_1$. Para $\beta_1(s_0) = t_0$ vem $t_0 > \underline{t}$, $u(s_0, t_0) - \frac{1}{2} t_0^{\frac{k}{l}} = 0$ e $u(s_0, t) - \frac{1}{2} t^{\frac{k}{l}} \neq 0$ para $t \in]0, t_0[$. Da definição de β_1 e da forma como foi escolhido \underline{t} resulta

$$u(s_0, t) - \frac{1}{2} t^{\frac{k}{l}} < 0 \text{ para } t \in]0, t_0[.$$

Dado $\delta > 0$, duas situações podem ocorrer: $t_0 - \delta > \underline{t}$ ou $]0, t_0 - \delta] \subset]0, \underline{t}]$.

No caso em que δ é tal que $t_0 - \delta > \underline{t}$ vem $u(s_0, t) - \frac{1}{2} t^{\frac{k}{l}} < 0$, $\forall t \in [\underline{t}, t_0 - \delta]$ e da continuidade de u resulta

$$\max_{t \in [\underline{t}, t_0 - \delta]} \left(u(s_0, t) - \frac{1}{2} t^{\frac{k}{l}} \right) = \mu < 0.$$

Uma vez que u é lipschitziana,

$$\begin{aligned} \max_{t \in [\underline{t}, t_0 - \delta]} \left(u(s, t) - \frac{1}{2} t^{\frac{k}{l}} \right) &\leq \max_{t \in [\underline{t}, t_0 - \delta]} (u(s, t) - u(s_0, t)) + \\ &\quad + \max_{t \in [\underline{t}, t_0 - \delta]} \left(u(s_0, t) - \frac{1}{2} t^{\frac{k}{l}} \right) \\ &\leq L|s - s_0| + \mu. \end{aligned} \quad (4.2.12)$$

Assim, existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo o $s \in D_1$ que satisfaça $|s - s_0| < \varepsilon$ vem

$$\max_{t \in [t, t_0 - \delta]} \left(u(s, t) - \frac{1}{2} t^{\frac{k}{l}} \right) < 0. \quad (4.2.13)$$

De (4.2.13) e (4.2.11) obtém-se

$$u(s, t) - \frac{1}{2} t^{\frac{k}{l}} < 0,$$

para $t \in]0, t_0 - \delta]$ e $s \in D_1$ tal que $|s - s_0| < \varepsilon$. Da definição de β_1 resulta que $\beta_1(s) > t_0 - \delta = \beta_1(s_0) - \delta$, para s nas condições indicadas.

No caso em que δ é tal que $]0, t_0 - \delta] \subset]0, t]$, vem $u(s, t) - \frac{1}{2} t^{\frac{k}{l}} < 0$, $\forall (s, t) \in D_1 \times]0, t_0 - \delta]$ e, por conseguinte, $\beta_1(s) > t_0 - \delta = \beta_1(s_0) - \delta$.

Conclui-se assim que, para todo $\delta > 0$, existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo s em D_1 que satisfaça $|s - s_0| < \varepsilon$ vem $\beta_1(s) > \beta_1(s_0) - \delta$, o que permite concluir que β_1 é semicontínua inferiormente em qualquer $s_0 \in D_1$, ou seja, β_1 é semicontínua inferiormente em D_1 . ■

Lema 4.2.3. *Sejam $u \in \mathcal{A}_f^\infty$, $l > k > 0$ com l e k ímpares e β_1 definida em (4.2.5). A função α_1 , definida por*

$$\alpha_1(s) = \sup \{ t \in [0, \beta_1(s)[: u(s, t) = 0 \}, \quad s \in D_1, \quad (4.2.14)$$

é mensurável.

Demonstração A demonstração é análoga à demonstração do Lema 3.5.3. ■

Para $u \in \mathcal{A}_f^\infty$ e para as funções $\beta_1(s)$, $\alpha_1(s)$ definidas em (4.2.5) e (4.2.14), respectivamente, prova-se, de modo análogo ao Lema 3.5.4, que o conjunto

$$A_1 = \{ (s, t) \in \Omega_1 : \alpha_1(s) \leq t \leq \beta_1(s) \}. \quad (4.2.15)$$

é mensurável.

4.2.2 Mensurabilidade do conjunto no caso em que $|D_1| < \frac{1}{2}$

Da definição de D_1 e D_2 , se $|D_1| < \frac{1}{2}$ vem $|D_2| \geq \frac{1}{2}$.

Dado $s \in D_2$, $u(s, 0) \geq 0$. Neste caso considera-se a parte do domínio

$$\Omega_2 = \{(s, t) \in \Omega : s \in D_2 \wedge t \leq 0\}.$$

O raciocínio é análogo ao feito na subsecção anterior.

Assim, do facto de u ser lipschitziana, para todo $(s, t) \in \Omega_2$,

$$-u(s, t) \leq -u(s, t) + u(s, 0) \leq |-u(s, t) + u(s, 0)| \leq L|t|.$$

Uma vez que $l - k$ é par, considere-se $\underline{t} < 0$ tal que

$$L\underline{t}^{1-\frac{k}{l}} < \frac{1}{2\left(\frac{M_2-M_1}{-M_1}\right)^{\frac{l-k}{l}}} \leq \frac{1}{2}. \quad (4.2.16)$$

Usando t_1 e t_2 definidos em (4.2.8), o facto de $\frac{-t_1}{t_2 - t_1} \geq \frac{-M_1}{M_2 - M_1}$ e um raciocínio análogo ao da demonstração do Lema 4.2.2, conclui-se que \underline{t} assim definido verifica $(s, \underline{t}) \in \Omega_2$, para todo $s \in D_2$.

Como

$$-u(s, t) + \frac{1}{2}t^{\frac{k}{l}} \leq L|t| + \frac{1}{2}t^{\frac{k}{l}} = \left(L|t|^{1-\frac{k}{l}} - \frac{1}{2}\right)|t|^{\frac{k}{l}},$$

vem

$$u(s, t) > \frac{1}{2}t^{\frac{k}{l}}, \quad \forall (s, t) \in D_2 \times [\underline{t}, 0]. \quad (4.2.17)$$

Usando um raciocínio análogo ao efectuado para β_1 e α_1 na subsecção anterior, o facto de $u(s, 0) \geq 0$ para cada $s \in D_2$ e $u(s, t) = t^{\frac{k}{l}} < \frac{1}{2}t^{\frac{k}{l}}$ para $(s, t) \in \partial_1\Omega$, conclui-se que as funções

$$\beta_2(s) = \sup \left\{ t < 0 : (s, t) \in \Omega_2 \wedge u(s, t) = \frac{1}{2}t^{\frac{k}{l}} \right\}, \quad s \in D_2, \quad (4.2.18)$$

e

$$\alpha_2(s) = \inf \{t \in]\beta_2(s), 0] : u(s, t) = 0\}, \quad s \in D_2 \quad (4.2.19)$$

estão bem definidas.

Lema 4.2.4. *Sejam $u \in \mathcal{A}^\infty$ e l e k ímpares com $k < l$. A função β_2 definida por (4.2.18) é semicontínua superiormente, e a função α_2 definida em (4.2.19) é mensurável.*

Demonstração Considere-se \underline{t} definido em (4.2.16). Dado $s_0 \in D_2$ e $\beta_2(s_0) = t_0$, $t_0 < \underline{t}$, $u(s_0, t_0) - \frac{1}{2}t_0^{\frac{k}{l}} = 0$ e $u(s_0, t) - \frac{1}{2}t^{\frac{k}{l}} \neq 0$ para $t \in]t_0, 0[$. Da definição de β_2 e de (4.2.17) resulta

$$u(s_0, t) - \frac{1}{2}t^{\frac{k}{l}} > 0 \text{ para } t \in]t_0, 0[.$$

Dado $\delta > 0$, duas situações podem ocorrer: $t_0 + \delta < \underline{t}$ ou $[t_0 + \delta, 0] \subset]\underline{t}, 0[$.

No caso de $t_0 + \delta < \underline{t}$ vem $u(s_0, t) - \frac{1}{2}t^{\frac{k}{l}} > 0$, $\forall t \in [t_0 + \delta, \underline{t}]$, e

$$\min_{t \in [t_0 + \delta, \underline{t}]} \left(u(s_0, t) - \frac{1}{2}t^{\frac{k}{l}} \right) = \mu > 0.$$

Uma vez que $\min_{t \in [t_0 + \delta, \underline{t}]} \left(u(s_0, t) - \frac{1}{2}t^{\frac{k}{l}} \right) = - \max_{t \in [t_0 + \delta, \underline{t}]} \left(-u(s_0, t) + \frac{1}{2}t^{\frac{k}{l}} \right)$ e u é lipschitziana,

$$\begin{aligned} \max_{t \in [t_0 + \delta, \underline{t}]} \left(-u(s, t) + \frac{1}{2}t^{\frac{k}{l}} \right) &\leq \max_{t \in [t_0 + \delta, \underline{t}]} (-u(s, t) + u(s_0, t)) + \\ &\quad + \max_{t \in [t_0 + \delta, \underline{t}]} \left(-u(s_0, t) + \frac{1}{2}t^{\frac{k}{l}} \right) \\ &\leq L|s - s_0| - \mu, \quad s \in D_2. \end{aligned} \quad (4.2.20)$$

Assim, existe $\varepsilon > 0$ tal que para $s \in D_2$ com $|s - s_0| < \varepsilon$, vem $\max_{t \in [t_0 + \delta, \underline{t}]} \left(-u(s, t) + \frac{1}{2}t^{\frac{k}{l}} \right) < 0$,
ou

$$\min_{t \in [t_0 + \delta, \underline{t}]} \left(u(s, t) - \frac{1}{2}t^{\frac{k}{l}} \right) > 0. \quad (4.2.21)$$

Sendo assim,

$$u(s, t) - \frac{1}{2}t^{\frac{k}{l}} > 0,$$

para $t \in [t_0 + \delta, \underline{t}]$ e $s \in D_2$ tal que $|s - s_0| < \varepsilon$. Nestas condições, $\beta_2(s) < t_0 + \delta = \beta_2(s_0) + \delta$.

Se δ é tal que $[t_0 + \delta, 0[\subset [\underline{t}, 0[$ vem $u(s, t) - \frac{1}{2}t^{\frac{k}{l}} > 0$ para todo $(s, t) \in D_2 \times [t_0 + \delta, 0[$ e, por conseguinte, $\beta_2(s) < t_0 + \delta = \beta_2(s_0) + \delta$.

Assim definida, β_2 é semicontínua superiormente em D_2 .

A demonstração de que α_2 é mensurável é análoga à do Lema 3.5.3, considerando os conjuntos

$$M^\gamma = \{s \in D_2 : \alpha_2(s) \leq \gamma\}$$

para $\gamma \in \mathbb{R}$. ■

Observação 4.2.5. Uma vez que β_2 é semicontínua superiormente pode-se concluir que o seu hipográfico, $\text{hypo } \beta_2 = \{(s, c) \in D_2 \times \mathbb{R} : \beta_2(s) \geq c\}$, e o conjunto $\{s \in D_2 : \beta_2(s) \geq c\}$ para todo o $c \in \mathbb{R}$, são conjuntos fechados.

De modo análogo ao que se fez anteriormente prova-se que o conjunto

$$A_2 = \{(s, t) \in \Omega_2 : \beta_2(s) \leq t \leq \alpha_2(s)\}, \quad (4.2.22)$$

onde β_2 e α_2 são as funções definidas em (4.2.18) e (4.2.19), respectivamente, é mensurável.

Fica assim provada a mensurabilidade dos conjuntos A_1 e A_2 .

4.2.3 Lavrentiev gap

Teorema 4.2.6. *Sejam l , k e m constantes com l e k ímpares e*

$$k < l, \quad 2m \geq \frac{2k+1}{l-k}l, \quad m \in \mathbb{N},$$

J o funcional definido em (4.2.1) e a classe \mathcal{A}_f^p definida em (4.2.2). O problema variacional

$$\inf_{\mathcal{A}_f^p} J[u]$$

exibe $W^{1,p} - W^{1,\infty}$ Lavrentiev gap para $p \in \left[1, \frac{1}{1 - \frac{k}{l}}\right]$.

Demonstração Seja $u \in \mathcal{A}_f^\infty$. Considere-se os conjuntos A_i , $i = 1, 2$ definidos em (4.2.15) e (4.2.22), respectivamente. Lembra-se que se considera A_1 no caso em que $|D_1| \geq \frac{1}{2}$, ou seja, no caso de u ser tal que $|\{s \in I : u(s, 0) \leq 0\}| \geq \frac{1}{2}$ e A_2 no caso contrário. Assim,

$$J[u] \geq \int_{A_i} (u^l - t^k)^2 |\nabla u|^{2m} ds dt, \quad i = 1, 2.$$

Suponhamos que $|D_1| \geq \frac{1}{2}$. Para cada $(s, t) \in A_1$ verifica-se $0 \leq u(s, t) \leq \frac{1}{2} t^{\frac{k}{l}}$ e, consequentemente,

$$(u^l(s, t) - t^k)^2 \geq (2^l u^l(s, t) - u^l(s, t))^2 = (2^l - 1)^2 u^{2l}(s, t), \quad (s, t) \in A_1. \quad (4.2.23)$$

Tendo em atenção esta desigualdade vem

$$\begin{aligned} J[u] &\geq (2^l - 1)^2 \int_{A_1} u^{2l}(s, t) |\nabla u(s, t)|^{2m} dt ds \\ &\geq (2^l - 1)^2 \int_{A_1} \left(u^{\frac{l}{m}}(s, t) u_t(s, t)\right)^{2m} dt ds. \end{aligned}$$

Usando um raciocínio semelhante ao usado na demonstração do Teorema 3.5.5 conclui-se que

$$\begin{aligned} \int_{A_1} \left(u^{\frac{l}{m}}(s, t) u_t(s, t)\right)^{2m} dt ds &= \left(\frac{m}{m+l}\right)^{2m} \int_{A_1} \left(\left(u^{\frac{l}{m}+1}\right)_t(s, t)\right)^{2m} dt ds \\ &= \left(\frac{m}{m+l}\right)^{2m} \int_{\Omega_1} \chi_{A_1} \left(\left(u^{\frac{l}{m}+1}\right)_t(s, t)\right)^{2m} dt ds. \\ &= \left(\frac{m}{m+l}\right)^{2m} \int_{D_1} \left(\int_0^{M_2} \chi_{A_1} \left(\left(u^{\frac{l}{m}+1}\right)_t(s, t)\right)^{2m} dt\right) ds. \end{aligned}$$

Assim,

$$J[u] \geq (2^l - 1)^2 \left(\frac{m}{m+l}\right)^{2m} \int_{D_1} \left(\int_{\alpha_1(s)}^{\beta_1(s)} \left(\left(u^{\frac{l}{m}+1}\right)_t(s, t)\right)^{2m} dt\right) ds. \quad (4.2.24)$$

Por outro lado, para cada $s \in D_1$, por aplicação da desigualdade de Jensen

$$\int_{\alpha_1(s)}^{\beta_1(s)} \left(\left(u^{\frac{l}{m}+1} \right)_t (s, t) \right)^{2m} dt \geq \frac{1}{(\beta_1(s) - \alpha_1(s))^{2m-1}} \left(\int_{\alpha_1(s)}^{\beta_1(s)} \left(u^{\frac{l}{m}+1} \right)_t (s, t) dt \right)^{2m}, \quad (4.2.25)$$

e usando o Lema de integração parcial obtém-se

$$\int_{\alpha_1(s)}^{\beta_1(s)} \left(u^{\frac{l}{m}+1} \right)_t (s, t) dt = u^{\frac{l}{m}+1}(s, \beta_1(s)) - u^{\frac{l}{m}+1}(s, \alpha_1(s)) \text{ para q. t. } s \in D_1.$$

Uma vez que $u(s, \alpha_1(s)) = 0$ e $u(s, \beta_1(s)) = \frac{1}{2}\beta_1(s)^{\frac{k}{l}}$, vem

$$\left(\int_{\alpha_1(s)}^{\beta_1(s)} \left(u^{\frac{l}{m}+1} \right)_t (s, t) dt \right)^{2m} = \left(\frac{1}{2} \right)^{2m(\frac{l}{m}+1)} \beta_1^{2m\frac{k}{l}(\frac{l}{m}+1)}(s) \text{ para q. t. } s \in D_1, \quad (4.2.26)$$

e, do facto de $2m \geq \frac{2k+1}{l-k}l$, resulta

$$\frac{\beta_1(s)^{2m\frac{k}{l}(\frac{l}{m}+1)}}{(\beta_1(s) - \alpha_1(s))^{2m-1}} \geq \frac{\beta_1(s)^{2m\frac{k}{l}(\frac{l}{m}+1)}}{(\beta_1(s))^{2m-1}} = \beta_1(s)^{2m\frac{k}{l}(\frac{l}{m}+1)-2m+1}. \quad (4.2.27)$$

De (4.2.24)-(4.2.27) vem

$$J[u] \geq \frac{(2^l - 1)^2}{2^{2m(\frac{l}{m}+1)}} \left(\frac{m}{l+m} \right)^{2m} \int_{D_1} \beta_1(s)^{2m\frac{k}{l}(\frac{l}{m}+1)-2m+1} ds. \quad (4.2.28)$$

No caso de $|D_1| < \frac{1}{2}$ considera-se D_2 e a parte A_2 do domínio na qual se verifica $\frac{1}{2}t^{\frac{k}{l}} \leq u(s, t) \leq 0$. Nestas condições,

$$(u^l(s, t) - t^k)^2 \geq (2^l u^l(s, t) - u^l(s, t))^2 = (2^l - 1)^2 u^{2l}(s, t), \quad (s, t) \in A_2. \quad (4.2.29)$$

Usando um raciocínio análogo ao anterior,

$$\begin{aligned} J[u] &\geq (2^l - 1)^2 \int_{A_2} u^{2l}(s, t) |\nabla u(s, t)|^{2m} dt ds \\ &\geq (2^l - 1)^2 \int_{A_2} \left((-u)^{\frac{l}{m}}(s, t) u_t(s, t) \right)^{2m} dt ds \\ &\geq (2^l - 1)^2 \left(\frac{m}{m+l} \right)^{2m} \int_{D_2} \left(\int_{\beta_2(s)}^{\alpha_2(s)} \left(\left((-u)^{\frac{l}{m}+1} \right)_t (s, t) \right)^{2m} dt \right) ds \\ &\geq \frac{(2^l - 1)^2}{2^{2m(\frac{l}{m}+1)}} \left(\frac{m}{l+m} \right)^{2m} \int_{D_2} |\beta_2|(s)^{2m\frac{k}{l}(\frac{l}{m}+1)-2m+1} ds. \end{aligned} \quad (4.2.30)$$

Sendo assim, de (4.2.28) e (4.2.30) conclui-se que, em qualquer dos casos, dado $u \in \mathcal{A}_f^\infty$, vem

$$J[u] \geq \frac{(2^l - 1)^2}{2^{2m(\frac{l}{m}+1)}} \left(\frac{m}{l+m} \right)^{2m} \int_{D_i} |\beta_i(s)|^{2m\frac{k}{l}(\frac{l}{m}+1)-2m+1} ds, \quad i = 1, 2.$$

Por outro lado, como $2m\frac{k}{l} \left(\frac{l}{m} + 1 \right) - 2m + 1 \leq 0$ e $|\beta_i(s)| \leq M$, $i = 1, 2$, com $M = \max\{M_2, |m_1|\}$, vem

$$J[u] \geq \frac{(2^l - 1)^2}{2^{2m(\frac{l}{m}+1)+1}} \left(\frac{m}{l+m} \right)^{2m} M^{2m\frac{k}{l}(\frac{l}{m}+1)-2m+1},$$

para todo $u \in \mathcal{A}_f^\infty$. Sendo assim,

$$\inf_{u \in \mathcal{A}_f^\infty} J[u] \geq \frac{(2^l - 1)^2}{2^{2m(\frac{l}{m}+1)+1}} \left(\frac{m}{l+m} \right)^{2m} M^{2m\frac{k}{l}(\frac{l}{m}+1)-2m+1} > 0, \quad (4.2.31)$$

o que permite concluir que há fenómeno de Lavrentiev. ■

Exemplo 4.2.7. Seja $\Omega = \{(s, t) \in \mathbb{R}^2 : s \in]0, 1[\wedge \theta_1(s) < t < \theta_2(s)\}$, com $\theta_1(s) = \frac{1}{2}s - 1$ e $\theta_2 = -2s^2 + 2s + \frac{1}{2}$. Assim definido, Ω tem fronteira de Lipschitz e é possível considerar $m_1 = -1$, $M_1 = -\frac{1}{2}$, $m_2 = \frac{1}{2}$ e $M_2 = 1$. Para $1 \leq p \leq +\infty$ seja $\mathcal{A}_f^p = \{u \in W^{1,p}(\Omega) : u(s, \theta_1(s)) = (\theta_1(s))^{\frac{3}{5}} \wedge u(s, \theta_2(s)) = (\theta_2(s))^{\frac{3}{5}}\}$. Neste caso o problema variacional

$$J[u] = \int_{\Omega} (u^5(s, t) - t^3)^2 |\nabla u|^{18} ds dt, \longrightarrow \inf, \quad u \in \mathcal{A}_f^p \quad (4.2.32)$$

exibe $W^{1,p} - W^{1,\infty}$ Lavrentiev gap para $p \in \left[1, \frac{5}{2}\right]$ com um valor não inferior a

$$\frac{(2^5 - 1)^2}{2^{29}} \left(\frac{9}{14} \right)^{18}. \quad (4.2.33)$$

Exemplo 4.2.8. Seja $\Omega = \{(s, t) \in \mathbb{R}^2 : s \in]0, 1[\wedge \theta_1(s) < t < \theta_2(s)\}$ com $\theta_2(s) = \eta_2(s)|_{[0,1]}$ e $\theta_1(s) = \eta_1(s)|_{[0,1]}$ o domínio apresentado no Exemplo 1.2.14. Como foi referido na Subsecção 1.2.3, dado $u \in W^{1,p}[\Omega]$ é possível definir traço de u para $p \geq 2$. Considere-se o problema variacional (4.2.32) com $\mathcal{A}_f^p = \{u \in W^{1,p}[\Omega] : u(s, \theta_1(s)) = (\theta_1(s))^{\frac{3}{5}} \wedge u(s, \theta_2(s)) = (\theta_2(s))^{\frac{3}{5}}\}$. Neste caso também é possível considerar $m_1 = -1$, $M_1 = -\frac{1}{2}$,

$m_2 = \frac{1}{2}$ e $M_2 = 1$. O problema variacional correspondente exhibe $W^{1,p} - W^{1,\infty}$ Lavrentiev gap para $p \in \left[1, \frac{5}{2}\right]$, com um valor não inferior ao apresentado em (4.2.33).

Exemplo 4.2.9. Seja Ω_e o domínio floco de neve de Von Koch construído a partir do triângulo equilátero de lado três e vértices nos pontos $\left(-1, -\sqrt{3} + \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)$ e $\left(2, -\sqrt{3} + \frac{1}{2}\right)$, como apresentado no Exemplo 1.2.15. Como foi referido na Subsecção 1.2.3 é possível definir traço para $u \in W^{1,p}(\Omega_e)$ com $p \in [2, +\infty]$.

Considere-se $\Omega = \Omega_e \cap \{(s, t) \in \mathbb{R}^2 : s \in]0, 1[\}$. Assim definido é possível considerar $m_1 = \frac{-3\sqrt{3}+1}{2}$, $M_1 = -\sqrt{3} + \frac{1}{2}$, $m_2 = \frac{1}{2}$ e $M_2 = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$.

Seja $\mathcal{A}_f^p := \{u \in W^{1,p}(\Omega) \cap \overline{C}(\Omega) : u(s, t) = t^{\frac{3}{5}}, \forall (s, t) \in \partial_1\Omega \cup \partial_2\Omega\}$ onde $\partial_1\Omega$ e $\partial_2\Omega$ são, respectivamente, as partes da fronteira que limitam Ω inferiormente e superiormente. O problema variacional apresentado em (4.2.32) exhibe $W^{1,p} - W^{1,\infty}$ Lavrentiev gap para $p \in \left[1, \frac{5}{2}\right]$, com um valor não inferior a

$$\frac{(2^5 - 1)^2}{2^{29}} \left(\frac{9}{14}\right)^{18} \sqrt[5]{\frac{2}{3\sqrt{3} - 1}}.$$

Usando um raciocínio análogo ao feito na Secção 3.5, prova-se que o fenómeno persiste a certas perturbações aditivas, sendo assim possível construir uma classe de funcionais regulares que exibem fenómeno de Lavrentiev.

Teorema 4.2.10. *Sejam k, l, m e r constantes positivas satisfazendo*

$$k < l < \frac{4}{3}k, \quad 2m \geq \frac{2k+1}{l-k}l, \quad 4 < r < \frac{l}{l-k} \quad l, m \in \mathbb{N}$$

com l e k ímpares. Então, existe ε_0 tal que para todo o ε que verifica $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, o problema variacional

$$J_\varepsilon[u] = \int_{\Omega} (u^l(s, t) - t^k)^2 |\nabla u(s, t)|^{2m} + \varepsilon |\nabla u|^r ds dt \rightarrow \inf, \quad u \in \mathcal{A}_f^p \quad (4.2.34)$$

exibe $W^{1,p} - W^{1,\infty}$ Lavrentiev gap para todo o $p \in \left[1, \frac{1}{1 - \frac{k}{l}}\right]$.

Demonstração A demonstração é análoga à demonstração do Teorema 3.5.9, tendo presente que para

$$P[u] = \int_{\Omega} |\nabla u(s, t)|^r ds dt = \int_{\Omega} (u_s^2 + u_t^2)^{\frac{r}{2}} ds dt$$

vem

$$P \left[t^{\frac{k}{l}} \right] = \int_{\Omega} \left(\frac{k}{l} |t|^{\frac{k}{l}-1} \right)^r ds dt =: c > 0.$$

■

Exemplo 4.2.11. Considere-se o domínio Ω e a classe de funções \mathcal{A}_f^p apresentados no Exemplo 4.2.7. O problema variacional

$$J[u] = \int_{\Omega} (u^9(s, t) - t^7)^2 |\nabla u(s, t)|^{68} + \varepsilon |\nabla u|^4 ds dt \longrightarrow \inf, \quad u \in \mathcal{A}_f^p$$

exibe $W^{1,p} - W^{1,\infty}$ Lavrentiev gap para $p \in \left[1, \frac{9}{2} \right]$, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno.

4.3 Fronteira livre

Ao eliminar as condições de fronteira o problema variacional definido através do funcional (4.2.1) deixa de exibir fenómeno. Com efeito, para $u_1(s, t) = c$ q.t. Ω , com c constante, vem $J[u_1] = 0$. Sendo assim, no que se segue considera-se o funcional

$$\bar{J}[u] = \int_{\Omega} (u^l(s, t) - t^k)^2 (|\nabla u(s, t)|^{2m} + 1) ds dt, \quad 1 \leq p \leq \infty, \quad (4.3.35)$$

com k, l, m nas condições do Teorema 4.2.6. Como $\bar{J}[t^{\frac{k}{l}}] = 0$ vem $\inf_{u \in \mathcal{A}_f^p} \bar{J}[u] = 0$ para

$1 \leq p < \frac{1}{1 - \frac{k}{l}}$ e \mathcal{A}_f^p definida em (4.2.2). Atendendo a (4.2.31) vem

$$\inf_{u \in \mathcal{A}_f^\infty} \bar{J}[u] \geq \inf_{u \in \mathcal{A}_f^\infty} J[u] \geq \frac{(2^l - 1)^2}{2^{2m(\frac{l}{m} + 1)}} \left(\frac{m}{l + m} \right)^{2m} \frac{M^{2m\frac{k}{l}(\frac{l}{m} + 1) - 2m + 1}}{2} > 0,$$

o que permite concluir que o problema variacional $\inf_{u \in \mathcal{A}_f^p} \bar{J}[u]$ também exibe fenómeno de Lavrentiev. No que se segue prova-se que quando se eliminam as condições de fronteira,

o problema funcional $\inf_{u \in W^{1,p}(\Omega)} \bar{J}[u]$ continua a exhibir fenómeno, tal como acontecia no domínio rectangular.

Considerando $\Omega_r =]0, 1[\times]M_1, m_2[\subset \Omega$ vem

$$\begin{aligned} \bar{J}[u] &= \int_{\Omega} (u^l(s, t) - t^k)^2 (|\nabla u(s, t)|^{2m} + 1) ds dt \\ &\geq \int_{\Omega_r} (u^l(s, t) - t^k)^2 (|\nabla u(s, t)|^{2m} + 1) ds dt. \end{aligned}$$

Lema 4.3.1. *Sejam $t_0 \in]0, m_2[$ e $u \in W^{1,\infty}(\Omega)$ tal que $u(s, t) < \frac{1}{2}t^{\frac{k}{l}}$, $\forall (s, t) \in [0, 1] \times]0, t_0]$, l e k constantes nas condições do Teorema 4.2.6, A um subconjunto fechado de $[0, 1]$ e os conjuntos*

$$B_1^+ = \{s \in A : \exists t \in]t_0, m_2] : u(s, t) \geq \frac{1}{2}t^{\frac{k}{l}}\} \quad (4.3.36)$$

e

$$B_2^+ = \{s \in A : u(s, t) < \frac{1}{2}t^{\frac{k}{l}}, \forall t \in]0, m_2]\}. \quad (4.3.37)$$

Assim definidos, B_1^+ e B_2^+ são conjuntos mensuráveis.

Demonstração Sejam

$$B = \{(s, t) \in A \times [t_0, m_2] : u(s, t) > \frac{1}{2}t^{\frac{k}{l}}\},$$

$$C_n = \{(s, t) \in A \times [t_0, m_2] : |u(s, t) - \frac{1}{2}t^{\frac{k}{l}}| < \frac{1}{n}\}$$

e π_s a projecção na 1ª componente.

Uma vez que

$$\pi_s(B) = B'_1 = \{s \in A : \exists t \in]t_0, m_2] : u(s, t) - \frac{1}{2}t^{\frac{k}{l}} > 0\}$$

e

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \pi_s(C_n) = B''_1 = \{s \in A : \exists t \in]t_0, m_2] : u(s, t) - \frac{1}{2}t^{\frac{k}{l}} = 0\}$$

vem

$$B_1^+ = B'_1 \cup B''_1.$$

Como B e C_n , para todo o $n \in \mathbb{N}$, são abertos em $A \times [t_0, m_2]$, B'_1 e $\pi_s(C_n)$ são abertos em A e, por conseguinte, B'_1 e B''_1 são mensuráveis. Assim, B_1^+ e B_2^+ são mensuráveis uma vez que $B_2^+ = A \setminus B_1^+$. ■

Lema 4.3.2. *Sejam $t_0 \in [M_1, 0[$, $u \in W^{1,\infty}(\Omega)$ tal que $u(s, t) > \frac{1}{2}t^{\frac{k}{l}}$, $\forall (s, t) \in [0, 1] \times]t_0, 0]$, l e k constantes nas condições indicadas anteriormente, A um subconjunto fechado de $[0, 1]$ e os conjuntos*

$$B_1^- = \left\{ s \in A : \exists t \in [M_1, t_0[: u(s, t) \leq \frac{1}{2}t^{\frac{k}{l}} \right\} \quad (4.3.38)$$

e

$$B_2^- = \left\{ s \in A : u(s, t) > \frac{1}{2}t^{\frac{k}{l}}, \forall t \in [M_1, 0[\right\}. \quad (4.3.39)$$

Assim definidos, B_1^- e B_2^- são conjuntos mensuráveis.

Demonstração Demonstração análoga à do Lema 4.3.1. ■

Teorema 4.3.3. *Sejam l , k e m inteiros positivos satisfazendo as condições do Teorema 4.2.6. O problema variacional*

$$\bar{J}[u] = \int_{\Omega} (u^l(s, t) - t^k)^2 (|\nabla u(s, t)|^{2m} + 1) ds dt \longrightarrow \inf \quad (4.3.40)$$

exibe $W^{1,p} - W^{1,\infty}$ Lavrentiev gap para $p \in \left[1, \frac{1}{1-\frac{k}{l}}\right[$.

Demonstração Sejam $u \in W^{1,\infty}(\Omega)$ e D_1 o conjunto definido em (4.2.3). Suponhamos que $|D_1| \geq \frac{1}{2}$. Nestas condições, considere-se $A = D_1$ em (4.3.36) e (4.3.37). Assim, $|B_1^+| + |B_2^+| \geq \frac{1}{2}$ e, consequentemente, $|B_1^+| \geq \frac{1}{4}$ ou $|B_2^+| \geq \frac{1}{4}$.

Considere-se o caso em que $|B_2^+| \geq \frac{1}{4}$. Nestas condições, dado $s \in B_2^+$, $u(s, t) < \frac{1}{2}t^{\frac{k}{l}}, \forall t \in [0, m_2]$ e, uma vez que l é ímpar,

$$u(s, t) - \frac{1}{2}t^{\frac{k}{l}} < 0 \implies u^l(s, t) < \frac{1}{2^l}t^k,$$

donde resulta,

$$(u^l - t^k)^2 > \left(\frac{1}{2^l} - 1\right)^2 t^{2k}.$$

Usando o Teorema de Fubini vem

$$\begin{aligned}
\bar{J}[u] &\geq \int_{\Omega_r} (u^l(s, t) - t^k)^2 (|\nabla u(s, t)|^{2m} + 1) ds dt \\
&\geq \int_{\Omega_r} (u^l(s, t) - t^k)^2 ds dt \\
&\geq \left(\frac{1}{2^l} - 1\right)^2 \int_{B_2^+ \times]0, m_2[} t^{2k} ds dt \\
&= \left(\frac{1}{2^l} - 1\right)^2 \int_{B_2^+} \left(\int_{]0, m_2[} t^{2k} dt\right) ds \\
&\geq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2^l} - 1\right)^2 \frac{m_2^{2k+1}}{2k+1}.
\end{aligned}$$

Assim, para $u \in W^{1,\infty}(\Omega)$, tal que $|B_2^+| \geq \frac{1}{4}$, ou seja,

$$\left| \left\{ s \in I : u(s, 0) \leq 0 \wedge u(s, t) < \frac{1}{2} t^{\frac{k}{l}}, \forall t \in]0, m_2] \right\} \right| \geq \frac{1}{4},$$

vem

$$\bar{J}[u] \geq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2^l} - 1\right)^2 \frac{m_2^{2k+1}}{2k+1} =: c_{11}. \quad (4.3.41)$$

Se $|B_2^+| < \frac{1}{4}$ vem $|B_1^+| \geq \frac{1}{4}$. Neste caso, dado $s \in B_1^+$, existe $t \in]t_0, m_2]$ tal que $u(s, t) \geq \frac{1}{2} t^{\frac{k}{l}}$, $u(s, 0) \leq 0$ e $u(s, t) < \frac{1}{2} t^{\frac{k}{l}}$ para $t \in]0, t_0]$. Nestas condições, e uma vez que u é contínua, dado $s \in B_1^+$ existe $t \in]0, m_2]$ tal que $u(s, t) = \frac{1}{2} t^{\frac{k}{l}}$.

Assim, as funções

$$\bar{\beta}_1(s) = \inf \{ t \in]0, m_2] : u(s, t) = \frac{1}{2} t^{\frac{k}{l}} \}, \quad s \in B_1^+, \quad (4.3.42)$$

e

$$\bar{\alpha}_1(s) = \sup \{ t \in [0, \bar{\beta}_1(s)[: u(s, t) = 0 \}, \quad s \in B_1^+ \quad (4.3.43)$$

estão bem definidas. De modo análogo ao que foi feito anteriormente prova-se que $\bar{\beta}_1$ é semicontínua inferiormente e que $\bar{\alpha}_1$ é mensurável.

Nestas condições, o conjunto

$$\bar{A}_1 = \{ (s, t) \in \Omega_r : s \in B_1^+ \wedge \bar{\alpha}_1(s) \leq t \leq \bar{\beta}_1(s) \} \quad (4.3.44)$$

é mensurável. Da definição de $\bar{\alpha}_1$ e $\bar{\beta}_1$ conclui-se que dado $(s, t) \in \bar{A}_1$ vem $0 \leq u(s, t) \leq \frac{1}{2}t^{\frac{k}{l}}$, donde resulta $(u^l(s, t) - t^k)^2 \geq (2^l u^l(s, t) - u^l(s, t))^2 = (2^l - 1)^2 u^{2l}(s, t)$ e, consequentemente,

$$\bar{J}[u] \geq (2^l - 1)^2 \int_{\bar{A}_1} \left(u^{\frac{l}{m}}(s, t) u_t(s, t) \right)^{2m} dt ds.$$

De modo análogo ao que foi feito na demonstração do Teorema 3.5.5 conclui-se que

$$\bar{J}[u] \geq \frac{(2^l - 1)^2}{2^{2m(\frac{l}{m}+1)}} \left(\frac{m}{l+m} \right)^{2m} \frac{m_2^{2m\frac{k}{l}(\frac{l}{m}+1)-2m+1}}{4} := c_{12}, \quad (4.3.45)$$

para $u \in W^{1,\infty}(\Omega)$ tal que $|B_1^+| \geq \frac{1}{4}$.

Assim, de (4.3.41) e (4.3.45) conclui-se que, para $u \in W^{1,\infty}(\Omega)$ tal que $|D_1| \geq \frac{1}{2}$, vem

$$\bar{J}[u] \geq c_1 > 0 \quad (4.3.46)$$

No caso de $|D_1| < \frac{1}{2}$ vem $|D_2| \geq \frac{1}{2}$, com D_2 definido em (4.2.4).

Considerando $A = D_2$ em (4.3.38) e (4.3.39), e procedendo de modo análogo ao caso anterior usando a definição de $\bar{\beta}_2$ e $\bar{\alpha}_2$ análoga à definição apresentada em (4.2.18) e (4.2.19), respectivamente, prova-se que para todo $u \in W^{1,\infty}(\Omega)$ tal que $|B_2^-| \geq \frac{1}{4}$ vem

$$\bar{J}[u] \geq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2^l} - 1 \right)^2 \frac{-M_1^{2k+1}}{2k+1} =: c_{21}$$

e, nos casos em que $|B_2^-| < \frac{1}{4}$,

$$\bar{J}[u] \geq \frac{(2^l - 1)^2}{2^{2m(\frac{l}{m}+1)}} \left(\frac{m}{l+m} \right)^{2m} \frac{-M_1^{2m\frac{k}{l}(\frac{l}{m}+1)-2m+1}}{4} =: c_{22}.$$

Assim, dado $u \in W^{1,\infty}(\Omega)$ tal que $|D_2| \geq \frac{1}{2}$ vem

$$\bar{J}[u] \geq c_2 > 0. \quad (4.3.47)$$

De (4.3.46)-(4.3.47) vem

$$\inf_{W^{1,\infty}(\Omega)} \bar{J}[u] \geq c > 0,$$

donde se conclui que o funcional \bar{J} exhibe fenómeno de Lavrentiev. ■

No que se segue prova-se que dado um domínio qualquer não vazio e aberto existe sempre um funcional que exhibe fenómeno de Lavrentiev.

4.4 Domínio aberto e existência de funcional que exhibe *gap*

Nesta Secção Ω é um domínio aberto e limitado de \mathbb{R}^2 .

Fixe-se $(s_0, t_0) \in \Omega$. Uma vez que Ω é aberto, existe $r > 0$ tal que $B_{\sqrt{2}r}(s_0, t_0) \subset \Omega$. Considere-se o quadrado centrado em (s_0, t_0) e lado $l = 2r$, ou seja $Q =]s_0 - r, s_0 + r[\times]t_0 - r, t_0 + r[$. Assim definido, $Q \subset B_{\sqrt{2}r}(s_0, t_0)$.

Considere-se $p \in [1, +\infty]$ e o problema variacional

$$J[u] = \int_{\Omega} \left(u^l(s, t) - (t - t_0)^k \right)^2 \left(|\nabla u(s, t)|^{2m} + \frac{1}{(2r)^{2m}} \right) ds dt \rightarrow \inf, \quad u \in W^{1,p}(\Omega), \quad (4.4.48)$$

com l, k e m nas condições da Teorema 4.2.6.

Para $u_0(s, t) = (t - t_0)^{\frac{k}{l}}$ vem $J[u_0] = 0$. Como Ω é limitado, $u_0 \in W^{1,p}(\Omega)$ para $p \in \left[1, \frac{1}{1-\frac{k}{l}}\right[$ e, por conseguinte,

$$\inf_{u \in W^{1,p}(\Omega)} J[u] = 0,$$

para esses valores de p .

Considere-se a mudança de variáveis

$$\begin{cases} s' &= \frac{1}{2r}(s - s_0 + r) \\ t' &= t - t_0 \end{cases}. \quad (4.4.49)$$

Nestas condições, $ds dt = 2r ds' dt'$. Considerando $v(s', t') = u(2rs' + s_0 - r, t' + t_0)$ vem

$$\begin{aligned} J[u] &= \left(\frac{1}{2r}\right)^{2m-1} \int_{\Omega'} (v^l(s', t') - (t')^k)^2 (|\nabla v(s', t')|^{2m} + 1) ds' dt' \\ &= J'[v]. \end{aligned}$$

Se $u \in W^{1,p}(\Omega)$, então $v \in W^{1,p}(\Omega')$, onde Ω' é o transformado de Ω pela mudança de variáveis considerada.

Seja $\Omega'_r =]0, 1[\times] - r, r[$. Da forma como se obteve Ω' verifica-se $\Omega'_r =]0, 1[\times] - r, r[\subset \Omega'$ e, consequentemente,

$$J'[v] \geq \left(\frac{1}{2r}\right)^{2m-1} \int_{\Omega'_r} (v^l(s', t') - (t')^k)^2 (|\nabla v(s', t')|^{2m} + 1) ds' dt'. \quad (4.4.50)$$

Aplicando ao segundo membro de (4.4.50) o que se fez na Secção 4.3 com o funcional definido em (4.3.35) e com o rectângulo $\Omega_r =]0, 1[\times]M_1, m_2[$ vem

$$J'[v] \geq c > 0, \quad (4.4.51)$$

para todo $v \in W^{1,\infty}(\Omega')$, com $c = c(r, l, k, m)$.

Como para todo $u \in W^{1,\infty}(\Omega)$ vem $J[u] = J'[v]$, com $v \in W^{1,\infty}(\Omega')$, conclui-se que

$$J[u] \geq c > 0,$$

para todo $u \in W^{1,\infty}(\Omega)$ e, por conseguinte,

$$\inf_{W^{1,\infty}(\Omega)} J[u] \geq c > 0$$

donde se conclui que o problema variacional (4.4.48) exhibe $W^{1,p} - W^{1,\infty}$ Lavrentiev gap

$$\text{para } p \in \left[1, \frac{1}{1 - \frac{k}{l}}\right].$$

Problema em aberto

Como já foi referido anteriormente, para problemas variacionais autónomos em dimensão um, cujos Lagrangianos satisfazem certas condições, existem resultados de regularidade lipschitziana dos minimizantes. Tentou-se usar, em dimensão dois, uma técnica semelhante à seguida por Dal Maso e Frankowska [21] em dimensão um.

Sejam $\Omega =]0, 1[\times]0, 1[$, o funcional

$$J[u] = \int_{\Omega} L(u(s, t), \nabla u(s, t)) \, dt \, ds,$$

com $L : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$,

$$\mathcal{A}^p = \left\{ u \in W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}) : u(0, t) = u_0, u(1, t) = u_1 \right\}$$

para $1 \leq p \leq +\infty$ e \bar{u} um minimizante do problema

$$\min_{u \in \mathcal{A}^1} J[u].$$

Define-se

$$f(s, t, v_1, v_2) = \begin{cases} L(\bar{u}(s, t), \frac{\bar{u}_s(s, t)}{v_1}, \frac{\bar{u}_t(s, t)}{v_2}) v_1 v_2 \, dt & \text{se } v_1, v_2 \geq \frac{1}{2} \\ +\infty & \text{se } v_1 < \frac{1}{2} \vee v_2 < \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Caso se verifique a igualdade

$$\int_{\Omega} f(s, t, w(s, t), w(s, t)) \, ds \, dt = \int_{\Omega} f(s, t, v_1(s), v_2(t)) \, ds \, dt,$$

para $w \in L^1(\Omega)$, $v_1, v_2 \in L^1((0, 1))$, $w(s, t)$, $v_1(s)$, $v_2(t) \in [\frac{1}{2}, 2]$, $\int_0^1 v_i(z) dz = 1$, $i = 1, 2$, é possível obter resultados de regularidade lipschitziana para problemas variacionais autónomos em 2D cujos Lagrangianos satisfazem condições de crescimento superquadrático em relação ao gradiente.

Bibliografia

- [1] R. A. Adams, J. F. Fournier, *Sobolev Spaces (2nd ed.)*. Academic Press, 2003.
- [2] G. Alberti, P. Majer, Gap phenomenon for some autonomous functionals. *J. Convex Anal.*, 1:31-45, 1994.
- [3] V. M. Alekseev, V. M. Tikhomirov, S. V. Fomin, *Optimal Control*. Consultants Bureau, New York, 1987.
- [4] L. Ambrosio, O. Ascenzi, G. Buttazzo, Lipschitz regularity for minimizers of integral functionals with highly discontinuous integrands. *J. Math. Anal. Appl.*, 142:301-316, 1989.
- [5] R. de Arcangelis, Some remarks on the identity between a variational integral and its relaxed functionals. *Ann. Univ. Ferrara, - Sez. VII - Sc. Mat.*, 35:135-145, 1989.
- [6] J.P. Aubin, H. Frankowska, *Set-Valued Analysis*. Birkhäuser, Boston, 1990.
- [7] J.M. Ball, V. J. Mizel, One-dimensional variational problems whose minimizers do not satisfy the Euler-Lagrange equations. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 90:325-338, 1985.
- [8] H. Brézis, *Analyse fonctionnelle, Théorie et applications*. MASSON, Paris, 1992.
- [9] G. Buskes, A. V. Rooij, *Topological spaces: from distance to neighborhood*. Springer-Verlag, New York, 1997.

- [10] G. Buttazzo, V. Mizel, Interpretation of the Lavrentiev phenomenon by relaxation. *J. Funct. Anal.* 110:434-460, 1992.
- [11] G. Buttazzo, M. Belloni, A survey on old and recent results about the gap phenomenon in the calculus of variations, Recent developments in well-posed variational problems. *Kluwer Acad. Publ.*, 1-27, 1995.
- [12] A. Caetano, A. Sarychev, D. Seabra, Two-dimensional stable Lavrentiev phenomenon with and without boundary conditions. *Control and Cybernetics*, 34:689-707, 2005.
- [13] A. Caetano, Approximation by functions of compact support in Besov-Triebel-Lizorkin spaces on irregular domains. *Stud. Math*, 142: 47-63, 2000.
- [14] A. P. Calderón, Lebesgue spaces of differentiable functions and distributions, *Proc. Sympos. Pure Math, Amer. Math. Soc.*, 4: 33-49, 1961.
- [15] A. Carvalho, Fractal geometry of Weierstrass-type functions, Preprint CM 05/I-05, Univ. Aveiro, 2005.
- [16] A. Cellina, A. Ferriero, E.M. Marchini, Reparametrizations and approximate values of integrals of the calculus of variations. *J. Differential Equations*, 193:374-384, 2003.
- [17] A. Cellina, A. Ferriero, Existence of Lipschitz solutions to the classical Problem of the Calculus of variations in the autonomous Case. *Ann. I. H. Poincaré- AN* 20, 6:911-919, 2003.
- [18] L. Cesari. *Optimization-Theory and Applications. Problems with Ordinary Differential Equations*. Springer-Verlag, New York, 1983.
- [19] F.H. Clarke, R. B. Vinter, Regularity properties of solutions to the basic problem in the calculus of variations. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 289:73-98, 1985.
- [20] B. Dacorogna, *Direct Methods in the Calculus of Variations*. Springer-Verlag, Berlin, 1989.

-
- [21] G. Dal Maso, H. Frankowska, Autonomous integral functionals with discontinuous nonconvex integrands: Lipschitz regularity of minimizers, DuBois-Reymond necessary conditions, and Hamilton-Jacobi equations. *Appl Math Optim*, 48:39-66, 2003.
- [22] K. Dani, W.J. Hrusa, V.J. Mizel, Lavrentiev phenomenon for totally unconstrained variational problems in one dimension. *NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl.*, 7:435-446, 2000.
- [23] R. Engelking, *General Topology*. Polish Scientific Publishers, Poland, 1977.
- [24] L. Esposito, F. Leonetti, G. Mingione, Sharp regularity for functionals with (p, q) growth. *J. Differential Equations*, 204:5-55, 2004.
- [25] L. C. Evans, R. F. Gariepy, *Measure theory and fine properties of functions*. CRC Press, 1992.
- [26] M. Foss, Examples of the Lavrentiev phenomenon with continuous Sobolev exponent dependence. *J. Convex Anal.*, 10:445-464, 2003.
- [27] M. Foss, W. J. Hrusa, V. J. Mizel, The Lavrentiev gap phenomenon in nonlinear elasticity. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 167:337-365, 2003.
- [28] R. V. Gamkrelidze, *Principles of optimal control theory*. Plenum Press, New York, 1978.
- [29] M. Guerra, A. Sarychev, Existence and Lipschitzian Regularity for relaxed minimizers. *Mathematical control theory and finance. Proceedings of the workshop, Lisbon*. Sarychev, Andrey (ed.) et al., April 10-14, 2007. Springer, Berlin, 231-250, 2008.
- [30] R. Horst, P.M. Pardalos, N.V. Thoai, *Introduction to Global Optimization*. Kluwer Acad. Publ., 2000.
- [31] P. W. Jones, Quasiconformal mappings and extendability of functions in Sobolev spaces, *Acta Math*, 147(1-2):71-88, 1981.

- [32] J. L. Kelley, *General Topology*. Springer-Verlag, New York, 1955.
- [33] M. Lavrentiev, Sur quelques problèmes du calcul des variations. *Ann. Mat. Pura Appl.*, 4:7-28, 1927.
- [34] P. A. Loeb, Minimal compactification for extending continuous functions. *SI Proc. Amer. Math Soc.*, 18:282-283, 1967.
- [35] P.D. Loewen, On the Lavrentiev phenomenon. *Canadian Math. Bulletin*, 30:102-108, 1987.
- [36] B. Manià, Sopra un esempio di Lavrentieff. *Boll. Un. Mat. Ital.*, 13:146-153, 1934.
- [37] C. Mariconda, G. Treu, Existence and Lipschitz regularity for minima. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 130:395-404, 2001.
- [38] V. G. Maz'ja, *Sobolev Spaces*. Springer-Verlag, 1985.
- [39] C. B. Morrey, *Multiple integrals in the calculus of variations*. Springer-Verlag, New York, 1966.
- [40] A. Ornelas, Lipschitz regularity for scalar minimizers of autonomous simple integrals. *J. Math. Anal. Appl.*, 300:285-296, 2004.
- [41] R. T. Rockafellar, *Convex Analysis*. Princeton Landmarks in Mathematics, 1997.
- [42] Luke G. Rogers, Degree-independent Sobolev extension on locally uniform domains. *J. Funct. Anal.*, 235:619-665, 2006.
- [43] A.V. Sarychev, First and Second-Order integral functionals of the calculus of variations which exhibit the Lavrentiev phenomenon. *J. Dynam. Control Systems*, 3:565-588, 1997.
- [44] A. V. Sarychev, D.F.M. Torres, Lipschitzian regularity of minimizers for optimal control problems with control-affine dynamics. *Appl Math and Optim*, 41:237-254, 2000.

-
- [45] E. M. Stein, Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions, *Princeton University Press*, vol. 30, 1970.
 - [46] V. Sverák, X. Yan, A singular minimizer of a smooth strongly convex functional in three dimensions. *Cal. Var. and Diff. Equations*, Springer-Verlag, 10:213-221, 2000.
 - [47] D.F.M. Torres, Lipschitzian regularity of the minimizing trajectories for nonlinear optimal control problems. *Math. Control Signals Systems*, 16:158-174, 2003.
 - [48] D.F.M. Torres, *Regularidade dos minimizantes no cálculo das variações e controlo óptimo*. Tese de Doutoramento, Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro, 2002.
 - [49] H. Triebel, *The structure of functions*. Birkhäuser, Basel, 2001.
 - [50] R. Vinter, *Optimal control*. Birkhäuser, Boston, 2000.
 - [51] V. V.Zhikov, On Lavrentiev's phenomenon. *Russian J. Math. Phys*, 3:249-269, 1995.
 - [52] W. P. Ziemer, *Weakly Differentiable Functions*. Springer-Verlag, Berlin, 1989.

Índice

1^o Axioma da enumerabilidade, 40

Compactificação de Loeb, 38

condições de coercividade, 29

conjunto- d , 13

derivada fraca, 8

domínio Lipschitz, 10

domínio(ϵ, δ), 11

espaço Sobolev, 8

exemplo de Ball e Mizel, 53

exemplo de Lavrentiev, 52

exemplo de Manià, 53

Fenómeno Lavrentiev, 52

função convexa, 28

função lipschitziana, 9

interior regular, 14

invólucro convexo, 28

Lema de integração parcial, 23

medida de Hausdorff, 9

minimamente regular, 15

par admissível, 26

problema autónomo, 26

problema compactificado, 44

problema regular, 52

problema relaxado, 30

problema relaxado de tempo óptimo, 34

suporte de uma função, 8

Teorema de Filippov, 27

traço, 14